Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Faglig kontakt under eksamen:
Alex Hansen
Telefon: 924 11 965

Eksamen i FY1002 BØLGEFYSIKK
Fredag, 2. juni, 2006
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle sprogutgaver).
O.H. Jahren og K.J. Knudsen: *Formelsamling i matematikk.*
Tosidig håndskrevet ark med formler.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1

Vi tar for oss en uendelig lang streng med massetetthet μ og snordrag F_T. Det går transversale bølger langs strengen. Disse har små utslag slik at bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \vec{D}(x,t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \vec{D}(x,t)}{\partial t^2} \ ,$$

gjelder. Her er $\vec{D}(x,t)$ det transversale ustslaget av strengen i punktet x og ved tiden t. Videre er $K = \mu / F_T$ en konstant.

a) Kan denne bølgen sirkulærpolariseres? Begrunn svaret.

b) Vi antar i resten av oppgaven at bølgen er polarisert i y-retningen. Vi har en harmonisk vandrebølge

$$D_y(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \ .$$

Her er $k = 2\pi/\lambda$ der λ er bølgelengden og $\omega = 2\pi\nu$ der ν er frekvensen. ϕ er en vilkårlig fasefaktor. Vi setter $\lambda = 400\text{m}$ og $\nu = 0,016\text{Hz}$. Hva er fasehastigheten? Hva er relasjonen mellom fasehastigheten og massetettheten μ?

c) Vis at dette systemet ikke har dispersjon. Det vil si, vis at gruppehastighet er lik fasehastighet her.

La oss nå anta at strengen svinger i luft som er overmettet med vanndamp. Det betyr at jo langsommere strengen svinger, jo høyere blir den effektive massetettheten μ til den siden mer og mer vann har anledning til å kondensere på strengen. La oss anta at

$$\mu(\nu) = \frac{\mu_0}{1 + (\nu_0/\nu)^2} \, ,$$

der μ_0 og ν_0 er konstanter. Vi antar videre at relasjonen mellom μ og fasehastigheten forblir uendret i forhold til punkt c) over. Vis at dispersjonsrelasjonen blir

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}} k \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \mu_0 \nu_0^2}{F_T k^2}} \right]^{1/2} \, .$$

d) Hvilken oppførsel må vi forvente av denne dispersjonsrelasjonen for korte bølgelengder? Begrunn svaret.

Oppgitt formel for denne oppgaven: $v_g = d\omega/dk$.

Oppgave 2

Maxwells ligninger er

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \, ,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \, ,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

og

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, .$$

a) Utled fra Maxwells ligninger bølgeligningen for elektriske felt,

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

og for magnetiske felt,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \, .$$

Vi antar en lysstråle som forplaner seg som en harmonisk planbølge i vakuum. Den er gitt ved

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_E)$$

og

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_B)$$

b) Vis at $\vec{k}/|\vec{k}|$ angir forplantningsretningen til denne planbølgen.

c) Bruk Maxwells første ligning, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ til å vise at $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, hvor $\vec{k}$. Bruk Maxwells andre ligning til å vise tilsvarende resultat for magnetfeltet. Hva sier dette om longitudinelle lysbølger?

d) Bruk Maxwells ligninger til å vise at

$$E_0 \perp B_0$$

for denne planbølgen.

e) Vis til sist at

$$cB = E$$

for denne bølgen.

Du får sikkert bruk for $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$.

Oppgave 3

Lorentz-transformasjonene mellom to inertielle referanse-systemer som beveger seg med relativhastighet $v = 1/2$ er

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}} \,, \\ \Delta t &= \frac{v\Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}} \,. \end{aligned}$$

Vi har brukt naturlige enheter i disse formelene slik at lyshastigheten er 1 og tid måles i meter.

a) Når lyshastigheten i SI-enheter er $c = 2,997925 \times 10^8$ meter per sekund, hva er 4×10^{-5} sekunder regnet om til naturlige enheter der tid må les i meter?

b) Beskriv med ord hva Lorentztransformasjonene brukes til. Hva er Δx, Δt, $\Delta x'$ og $\Delta t'$?

Vi vil i det følgende kalle (t, x)-systemet for *laboratorie-systemet* og (t', x')-systemet for *rakett-systemet.*

c) Vi antar at en stav med lengde l' ligger i ro relativt til rakettsystemet. Hvor lang vil den se ut i laboratoriesystemet? (Hint: Tenk på at du må måle begge endene av staven *til samme tid* i laboratoriesystemet.)

Svar: $l = (\sqrt{3}/2)l'$. Dette kalles *Lorentz-kontraksjonen.*

Siden staven i det laboratoriet kun har en lengde på $l = (\sqrt{3}/2)l' \approx 0.87l'$, vil den passe inn i en boks med lengde $l_e = (9/10)l$. Legg merke til at $l < l_e$. Boksen har lokk i begge ender som kan lukkes raskt. La oss anta de er åpne, og i det øyeblikket hele staven er inne i boksen, lukker vi igjen begge lokkene.

Sett fra rakett-systemet har staven lengde l og det er *boksen* som er Lorentz-kontraktert. Den har en lengde i dette systemet på $l'_e = (\sqrt{3}/2)l_e$. Det vil si at $l'_e < l'$: Staven er i dette systemet *lengre* enn boksen og kan da ikke lukkes inne i den.

Her har vi et paradoks. I laboratorie-systemet har vi lukket staven inne i boksen, mens i rakettsystemet er staven for lang i forhold til boksen og den kan ikke lukkes inne i den. Vi skal nå rydde opp i dette.

d) Bruk Lorentz-transformasjonene til å finne tidsforskjellen mellom lukkingen av lokket foran staven og lukkingen av lokket bak staven i rakettsystemet når dette skjer simultant i laboratorie-systemet.

Svar: $\Delta t' = -l_e/\sqrt{3}$.

e) Hva betyr fortegnet i svar-formelen over med hensyn på hvilket lokk som ble lukket først?

f) Hvor er bakenden av staven når front-lokket lukkes i rakettsystem og hvor er frontenden av staven når lokket bak lukkes i rakettsystemet? (Svar kun kvalitativt — men legg vekt på hvordan dette løser paradokset.)