Løsning Øving 11

Løsning oppgave 1

a) Ifølge lign. (4.32) i forelesningene, er vinkelelen θ_1 mellom første og nullte ordens maksima gitt ved:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} \tag{1}$$

der d er spalteavstanden. Vi kan her nytte $\sin\theta_1 \approx \frac{y_1}{L}$ der y_1 er avstanden mellom nullte og første ordens maksima og L er avstand fra spaltene til filmen. Fra (1) har vi da:

$$y_1 = \frac{\lambda L}{d} = \frac{589 \cdot 10^{-8} \cdot 2.00}{0.12 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{m} = 0.00982\ \mathrm{m} \approx \underline{\underline{9.8\ \mathrm{mm}}}$$

b) Dette er det samme poblemet som i pkt. a, men med $\lambda \ \rightarrow \lambda_{\text{vann}} = \lambda/n$. Dermed:

$$y_1 = \frac{\lambda/n \cdot L}{d} = \frac{0.0982}{1.33}\ \mathrm{m} \approx \underline{\underline{7.4\ \mathrm{mm}}}$$

Løsning oppgave 2

Fra forelesningene pkt. 4.5.2 (se spesielt lign. (4.46)) forstår vi at tykkelsen t av plastfolien må være så stor at:

$$k_{\text{plast}} \cdot t - k_{\text{vakuum}} \cdot t = \pi$$

dvs:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{plast}}} - \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vakuum}}}\right) \cdot t = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vakuum}}}(n_{\text{plast}} - 1) \cdot t = \pi$$

som gir:

$$t = \frac{\lambda_{\text{vakuum}}}{2} \cdot \frac{1}{n_{\text{plast}} - 1} = \frac{510}{2(1.60 - 1)}\ \mathrm{nm} = 425\ \mathrm{nm} \approx \underline{\underline{430\ \mathrm{nm}}}$$

Løsning oppgave 3

Den strålen som reflekteres i overgangen fra luft til såpefilm får et faseskift på π ved refleksjonen. Vi vil se den fargen som har bølgelengde λ som gir konstruktivt interferens. Dvs., dersom vi kaller tykkelsen av filmen t, må vi ha:

$$2t = (m + 1/2)\lambda_{\text{såpefilm}} = (m + 1/2) \cdot \frac{\lambda_{\text{vakuum}}}{n}$$

som gir:

$$\lambda_{\text{vakuum}} = \frac{2t \cdot n}{m + 1/2} = \frac{321.6}{m + 1/2} \text{ nm} \tag{2}$$

synlig lys har bølgelengde i området $400 - 700$ nm. (2) gir kun synlig lys om vi velger $m = 0$. Dermed:

$$\lambda_{\text{vakuum}} = \frac{321.6}{1/2} \text{ nm} \approx \underline{\underline{640 \text{ nm}}}$$

dvs, vi ser rødt lys.

Løsning oppgave 4

Vi får faseskift π ved begge overflater. For bølgelengden λ_1 som gir maksimum må vi derfor ha:

$$2t = m\frac{\lambda_1}{n_1} \tag{3}$$

der m er et heltall og t tykkelsen av filmen. For bølgelengden λ_2 som gir minimum:

$$2t = (m + 1/2)\frac{\lambda_2}{n_1} \tag{4}$$

(3) og (4) gir:

$$m\frac{\lambda_1}{n_1} = (m + 1/2)\frac{\lambda_2}{n_1}$$

$$m = \frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1/2 \cdot 520}{650 - 520} = 2 \tag{5}$$

som gir innsatt i (3):

$$t = \frac{2}{2} \cdot \frac{650}{1.36} \text{ nm} = 478 \text{ nm} \approx \underline{\underline{480 \text{ nm}}}$$

Løsning oppgave 5 (Eksamensoppgave 2 i Fysikk 3 2/12-1998)

a) Av figuren i oppgaveteksten ser vi at ganglengdeforskjellen mellom stråler fra S_1 og S_2 til P er $d \sin\theta$. Vi får da konstruktiv interferens, dvs. sentrum i de lysstripene eller lysmaksima for:

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dvs. for bøyningsvinkler θ gitt ved

$$\underline{\underline{\sin\theta = n\frac{\lambda}{d}}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

Med $\lambda = 500$ nm og $d = 50$ μm gir (6):

$$\sin\theta = n \cdot 0.01, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Siden $\sin\theta$ maksimalt kan være 1, får vi altså lysmaksima for θ gitt ved:

$$\underline{\underline{\sin\theta = n \cdot 0.01}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 100 \tag{7}$$

b) Totalt felt E_θ i pkt. P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2 = E_0 \left\{\cos[kr - \omega t - \varphi] + \cos[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]\right\} \tag{8}$$

Oppgitt:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{9}$$

(9) i (8) med $a = kr - \omega t - \varphi$ og $b = k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi$ gir:

$$E_\theta = 2E_0 \cos\left(k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi\right)\cos\left(-\frac{k\Delta r}{2}\right) \tag{10}$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d\sin\theta \tag{11}$$

Definerer:

$$\delta \equiv kd\sin\theta = k\Delta r \tag{12}$$

(11) og (12) innsatt i (10) gir:

$$E_\theta = \underbrace{2E_0\cos\frac{\delta}{2}}_{\equiv E_{\theta_0}}\cos(k(r + \Delta r/2) - \omega t - \varphi) = E_{\theta_0}\cos(\omega t + \varphi_1) \tag{13}$$

der vi har definert

$$\varphi_1 = k(r + \Delta r/2) - \varphi \tag{14}$$

For et gitt pkt. P er φ_1 konstant og ifølge det oppgitt får vi da:

$$I_\theta = \varepsilon_0 c_0 \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 E_{\theta_0}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0\left(2E_0\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{15}$$

For $\theta = 0$:

$$I_0 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2 \tag{16}$$

og dermed

$$\underline{\underline{I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \qquad \text{q.e.d.} \tag{17}$$

Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{\delta}{2} = m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{18}$$

dvs. når:

$$\frac{kd \sin\theta}{2} = m\pi \tag{19}$$

eller (med $k = 2\pi/\lambda$) for:

$$\underline{\underline{\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

som er det samme som vi fikk i pkt. a.

c) Interferensmønsteret nær $\theta = 0$ vil ikke bli påvirket av at $l_c = 5\ \mu$m i stedet for at $l_c = \infty$, fordi ganglengdeforskjellen $d\sin\theta$ fra S_1 og S_2 til observasjonsskjermen B da er vesentlig mindre enn l_c. Siden l_c ikke påvirker middelbølgelengden vil ikke posisjonen til intensitetsmaksima bli endret verken for små eller store θ. Men når $d\sin\theta$ blir av samme størrelsesorden som l_c, dvs. når:

$$d\sin\theta \approx \pm l_c$$

eller

$$\sin\theta \approx \pm\frac{l_c}{d} = \pm\frac{5\ \mu\text{m}}{50\ \mu\text{m}} = \pm 0.1 \tag{21}$$

begynner det å bli mindre kontrast mellom lyse og mørke striper. Når $\sin\theta$ nærmer seg ± 1 vil veglengdeforskjellen nærme seg 50 μm dvs. $10 l_c$, og lys fra S_1 og S_2 er da tilnærmet inkoherent med hverandre og stripemønsteret utvisket.

d) Det lyset som går gjennom glassplaten og S_2 vil bli forsinket sammenlignet med det lyset som går gjennom S_1. Kalles tykkelsen av glassplaten b blir faseforskjellen Φ gitt ved:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\cdot b - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot b = (n-1)\frac{2\pi}{\lambda}\cdot b$$

Tilsvarende veglengdeforskjell i vakuum blir:

$$f = (n-1)b$$

<u>Tilfelle 1:</u>

$$f = (1.50 - 1.00)\cdot 500\ \text{nm} = 250\ \text{nm} = \frac{1}{2}\lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin\theta = (n - 1/2)\lambda_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{22}$$

Dvs. vi får maksima der vi hadde minima uten glass og omvendt.

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved.

$$\sin\theta_1 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_m}{d} = -0.005 \tag{23}$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_1$ som den gjorde på begge sider av $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full uttelling for tilfelle 1 siden det er så liten forskyvning.))

<u>Tilfelle 2:</u>

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 1000 \text{ nm} = 500 \text{ nm} = \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da

$$d \sin\theta = (n - 1)\lambda_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{24}$$

Dvs. vi får lysmaksima og lysminima der vi hadde det uten glass.

(Sentrum av intererensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin\theta_2 = -\frac{\lambda_m}{d} = -0.01 \tag{25}$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_2$ som den gjorde på begge sider av $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full uttelling for tilfelle 2 siden det er så liten forskyvning.))

<u>Tilfelle 3:</u>

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 30 \ \mu\text{m} = 15 \ \mu\text{m} = 30\lambda_m$$

Sentrum i det synlige interferensmønsteret vil nå være gitt ved:

$$\sin\theta_3 = -30\frac{\lambda_m}{d} = -0.30 \tag{26}$$

og de vinklene der interferensmønsteret begynner å bli utydelig finnes der ganglengdeforskjellen er $l_c = 10\lambda_m$ forskjellig fra det gitt ved lign. (26), dvs. når:

$$\sin\theta = \frac{-30\lambda_m \pm 10\lambda_m}{d}$$

dvs. når:

$$\sin\theta = \left\{ \begin{array}{c} -0.2 \\ -0.4 \end{array} \right\} \tag{27}$$

(I den grad lysmaksima kan sees på samme sted som uten glass vil de ha samme posisjon som disse, men vi har altså ikke <u>tydelige</u> lysmaksima på samme sted som når vi ikke har glass foran S_2.)

<u>Tilfelle 4:</u> $\underline{b = 1000\ \mu\text{m}}$

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 1000\ \mu\text{m} = 500\ \mu\text{m} = 100 l_c$$

Den minste optiske veglengdeforskjell vi da kan få på skjermen er

$$f - d = 500\ \mu\text{m} - 50\ \mu\text{m} = 450\ \mu\text{m} = 90 l_c$$

Dvs. at intet lys fra S_1 som er tilnærmet koherent med lys fra S_2 kan møtes på noe punkt på observasjonsskjermen B. Vi får derfor bare en jevn lysfordeling på denne og intet interferensmønster.

e) Vi har også her at

$$\Delta r = d \sin\theta \tag{28}$$

og setter

$$\delta \equiv k\Delta r = kd\sin\theta \tag{29}$$

Vi får da:

$$\Psi_\theta = \Psi_1 + \Psi_2 = \psi_0 \left[e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right] \tag{30}$$

og dermed

$$\begin{aligned} |\Psi_\theta|^2 = \Psi_\theta \cdot \Psi_\theta^* &= |\psi_0|^2 \left[e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \right] \cdot \left[e^{-i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{-i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \right] \\ &= |\psi_0|^2 \left[1 + e^{-ik\Delta r} + e^{ik\Delta r} + 1 \right] = |\psi_0|^2 \cdot 2[1 + \cos\delta] = \underline{\underline{4|\psi_0|^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \end{aligned} \tag{31}$$

Ifølge Max Borns sannsynlighetsinterpretasjon er $|\Psi_\theta|^2$ sannsynlighetstettheten for ett (dvs. hvert) elektrons treffpunkter.