Løsning Øving 2

Løsning oppgave 1

Ligning (1) i oppgaveteksten er i dette tilfellet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

Vi setter inn:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2}$$

i lign. (1) og får:

$$-m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -kA\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{3}$$

som gir:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{4}$$

og

$$k = m\omega_0^2 = \underline{\underline{m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2}} \tag{5}$$

Med $m = 5.00$ kg og $T_0 = 10.0$ s:

$$k = 5.00 \cdot \left(\frac{2\pi}{10.0}\right)^2 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{1.97 \text{ N/m}}} \tag{6}$$

b) Fra lign. (1) i oppgaveteksten får vi i dette tilfellet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{7}$$

Vi setter inn:

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) \tag{8}$$

i lign. (7) og får:

$$\begin{aligned} &m(\delta^2 - \omega_d^2)Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) + 2m\omega_d\delta Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \varphi) \\ &- b\delta Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) - b\omega_d Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \varphi) \\ &+ kAe^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

eller:

$$\left[m(\delta^2 - \omega_d^2) - b\delta + k\right] Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) + \left[2m\omega_d\delta - b\omega_d\right]\sin(\omega_d t + \varphi) = 0 \tag{10}$$

Skal lign. (10) være lik 0 for alle t, må vi ha at konstantene foran $\cos(\omega_d t + \varphi)$ og $\sin(\omega_d t + \varphi)$ må være lik null hver for seg, dvs.:

$$2m\omega_d\delta - b\omega_d = 0 \tag{11}$$

$$m(\delta^2 - \omega_d^2) - b\delta + k = 0 \tag{12}$$

Lign. (11) gir:

$$\underline{\delta = \frac{b}{2m}} \tag{13}$$

Med $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ og $\delta = \frac{b}{2m}$ innsatt lign. (11), får vi:

$$\delta^2 - \omega_d^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2 = 0$$

som gir:

$$\underline{\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2} \tag{14}$$

(14) med (13) innsatt gir:

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 - \omega_d^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_d}\right)^2$$

eller

$$\underline{\underline{b = 4\pi m \left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_d^2}\right)^{1/2}}} \tag{15}$$

Med innsatte tallverdier:

$$b = 4\pi \cdot 5.00 \left(\frac{1}{10.0^2} - \frac{1}{10.5^2}\right)^{1/2} \text{ kg/s} = \underline{\underline{1.91 \text{ Ns/m}}}$$

c) For en gitt F_0 har A_0 maksimum når $\omega G(\omega)$ har minimum, som (siden både ω og $G(\omega)$ er positive) har minimum når $\omega^2 G^2(\omega)$ har minimum. Fra det oppgitt i oppgaveteksten har vi:

$$\omega^2 G^2(\omega) = \omega^2 \left(b^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2\right) = b^2\omega^2 + m^2\omega^4 - 2km\omega^2 + k^2$$

Vi ser at dette uttrykket kun har minimum og ikke maksimum og at vi derfor kan finne minimum ved å sette $\frac{d\left[\omega^2 G^2(\omega)\right]}{d\omega}$ lik null. Siden $\omega^2 G^2(\omega)$ bare avhenger av ω^2, må vi finne samme minimum ved å sette $\frac{d\left[\omega^2 G^2(\omega)\right]}{d(\omega^2)}$ lik null som gir:

$$\frac{d\left[\omega^2 G^2(\omega)\right]}{d(\omega^2)} = b^2 + 2m^2\omega^2 - 2km = 0$$

som gir:

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 = \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2} &= \omega_0^2 - 2\delta^2 = \omega_d^2 - \delta^2 = \omega_d^2 - (\omega_0^2 - \omega_d^2) \\
&= 2\omega_d^2 - \omega_0^2 = 4\pi^2\left(\frac{2}{T_d^2} - \frac{1}{T_0^2}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

og dermed:

$$
\omega_1 = \underline{\underline{2\pi\left(\frac{2}{T_d^2} - \frac{1}{T_0^2}\right)^{1/2}}} = 2\pi\left(\frac{2}{10.5^2} - \frac{1}{10^2}\right) \text{ rad/s} = \underline{\underline{0.567 \text{ rad/s}}} \tag{17}
$$

Tilhørende tallverdi for φ_0 fåes ved å sette inn $\omega = \omega_1 = 0.567$ rad/s, $k = 1.97$ N/m og $b = 1.91$ Ns/m inn i oppgitt uttrykk for $\cos\varphi_0$:

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi_0 &= \frac{b}{\sqrt{b^2 + (\omega_1 m - k/\omega_1)^2}} \\
&= \frac{1.91}{\sqrt{(1.91)^2 + \left(0.567 \cdot 5.00 - \frac{1.97}{0.567}\right)^2}} \\
&= 0.948
\end{aligned}
$$

og

$$
\underline{\underline{\varphi_0 = 18.5^\circ}}
$$

$$
v = \frac{dx}{dt} = \omega A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{18}
$$

Amplituden v_0 er altså:

$$
v_0 = \omega A_0 = \omega \frac{F_0}{\omega G(\omega)} = \frac{F_0}{G(\omega)} \tag{19}
$$

Vi ser av (19) at v_0 har maksimum når $G(\omega)$ har minimum som vi direkte ser er for:

$$
\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2 = 0
$$

dvs.:

$$
\omega^2 = \frac{k}{m}
$$

og

$$
\underline{\underline{\omega_2 = \omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 0.628 \text{ rad/s}}}
$$

Tilhørende verdi for φ_0 er gitt ved:

$$\cos\varphi_0 = \frac{b}{b} = 1$$

dvs.:

$$\underline{\underline{\varphi_0 = 0}}$$

Merknader:

1) For å få maksimal hastighet må vi altså velge $\omega = \omega_0$, dvs. den samme frekvens som systemet svinger fritt med når vi ikke har dempning. Da blir $\varphi_0 = 0$. Dvs. at $x = A_0 \sin\omega t = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ når $F(t) = F_0 \cos\omega t$. Det betyr at kraften ligger $\frac{\pi}{2}$ foran utsvinget og altså i fase med hastigheten $\left(v = \frac{dx}{dt} = \omega A_0 \cos\omega t\right)$. Altså f.eks. begynner kraften å virke i positiv retning akkurat når vi har maksimal negativt utsving og får sin maksimale verdi for $x = 0$ når hastigheten er maksimal (og dermed også friksjonen). Det virker ikke urimelig fysisk at det er dette som gir maksimal hastighet. Det er imidlertid ikke dette som gir maksimalt utslag og maksimal potensiell energi. Det virker ikke urimelig fordi vi i dette tilfellet ved $x = 0$ mister maksimalt med energi til friksjon.

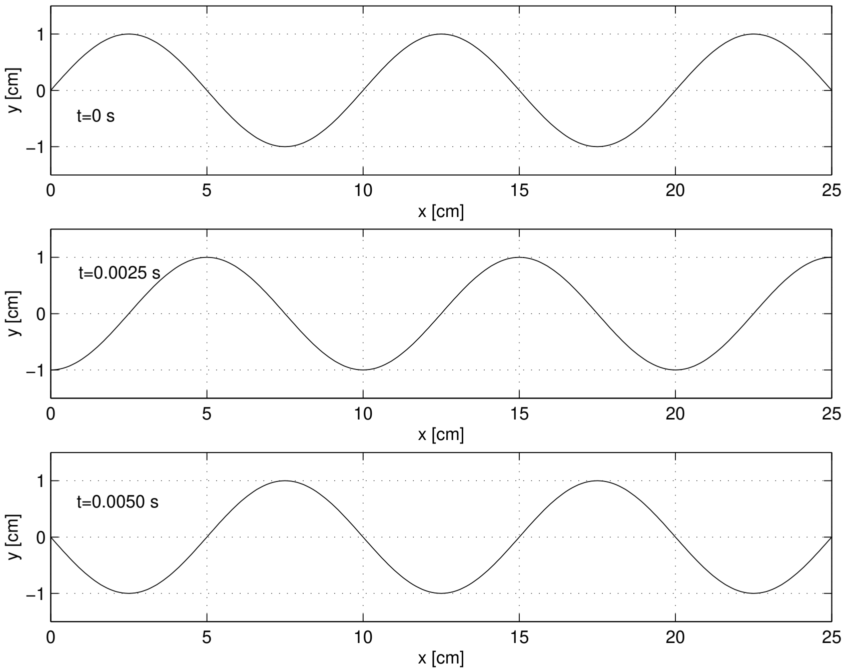
2) For å få maksimalt utsving må vi når $\delta \neq 0$ ha $\varphi_0 > 0$ og større dess større δ. Det betyr at $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$ og kraften ligger φ_0 mindre enn $\frac{\pi}{2}$ foran utsvinget. Det betyr at vi forsøker å få massen til å gå litt "lenger enn den vil selv", dvs. vi har ytre påtrykt kraft i utsvingsretningen på massen når den snur. Det virker ikke urimelig at vi må ha det slik for å få maksimalt utslag. Det virker heller ikke urimelig at vi for maksimalt utslag i samsvar med dette, har $\omega_1 < \omega_0$ og $T_1 > T_0$.

Løsning oppgave 2

a)

$$y = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{20}$$

med $A = 0.010$ m, $T = 0.010$ s, $\lambda = 0.10$ m.



Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for $\underline{\underline{t = n \cdot 1.0 \cdot 10^{-2}\ \text{s}}}$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Vi ser av figuren ovenfor at: $\underline{\underline{T = 0.010\ \text{s}}}$.

c) Vi ser også av figuren ovenfor at: $\underline{\underline{\lambda = 0.10\ \text{m}}}$.

d) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 0.10$ m på en periode $T = 0.010$ s. Altså er fasehastigheten

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10\ \text{m}}{0.010\ \text{s}} = \underline{\underline{10\ \text{m/s}}}.$$

Hastigheten til strengelementene (i y-retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = -\omega A\cos(kx - \omega t). \tag{21}$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengelement:

$$v_p^{\text{maks}} = \omega A = 2\pi \cdot 1.0 \cdot 10^2\ \text{s}^{-1} \cdot 0.010\ \text{m} = 2\pi\ \text{m/s} \approx \underline{\underline{6.3\ \text{m/s}}}$$

e)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) \tag{22}$$

som har maksimalverdi:

$$a^{\text{maks}} = \omega^2 A = \left(2\pi \cdot 1.0 \cdot 10^2\ \text{s}^{-1}\right)^2 \cdot 0.010\ \text{m} = \underline{\underline{3.9 \cdot 10^3\ \text{m/s}^2}}.$$

f) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\underline{\underline{\varphi = -\frac{\pi}{2}}}$, vil $y = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$ beskrive samme bølge som $y = A\sin(kx - \omega t)$.

<u>Merknad:</u> Fra (20), (21) og (22) har vi:

$$\begin{aligned}
y &= A\sin(kx - \omega t) \\
v_p &= -\omega A\cos(kx - \omega t) = -\omega A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \omega A\sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A\sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
a &= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = \omega^2 A\sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A\sin[kx - (\omega t + \pi)].
\end{aligned}$$

Med andre ord så sier vi at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y.