Løsning Øving 3

Løsning oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + y_2 \\ &= A\cos(kx - \omega t + \varphi_1) + A\cos(kx - \omega t + \varphi_2) \\ &= 2A\cos\frac{kx - \omega t + \varphi_1 + kx - \omega t + \varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \\ &= 2A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \\ &= \underline{\underline{A_3\cos(kx - \omega t + \varphi_3)}} \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{1}$$

der vi har satt:

$$A_3 \equiv \underline{\underline{2A\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \equiv 2A\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}} \tag{2}$$

$$\varphi_3 = \underline{\underline{\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}} \tag{3}$$

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left|\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 1,$$

dvs. når $\frac{\Delta\varphi}{2} = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs. når $\underline{\underline{\Delta\varphi = n \cdot 2\pi}}, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $\underline{\underline{|A_3|^{\text{maks}} = 2A}}$ (Bølgene adderes i fase.)

$|A_3|$ har minimalverdi når

$$\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 0,$$

dvs. når $\frac{\Delta\varphi}{2} = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs. når $\underline{\underline{\Delta\varphi = (2n+1) \cdot \pi}}, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $\underline{\underline{|A_3|^{\text{min}} = 0}}$ (Bølgene adderes i motfase.)

Løsning oppgave 2

a) Vi har:

$$\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2}. \tag{4}$$

og

$$\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2}. \tag{5}$$

(4) + (5) gir (siden partiell derivasjon er en lineær operasjon):

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2}}} &= \frac{\partial^2[D_1(x,t)+D_2(x,t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2[D_1(x,t)+D_2(x,t)]}{\partial t^2} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}}} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

b) Vi betrakter først $f(x-vt)$ og setter $\xi = x - vt$. Vi får da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = -v\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{6}$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -v\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{7}$$

eller

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{8}$$

Helt tilsvarende (da $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$) får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{9}$$

(8) og (9) gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{10}$$

som viser at $f(x-vt)$ oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

På helt tilsvarende vis (bortsett fra at vi ikke får minustegn foran v som i (6) og (7)) får vi:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \tag{11}$$

Punkt a og lign. (10) og (11) gir da at:

$$D(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten. q.e.d.