Løsning Øving 4

Løsning oppgave 1

a)

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)} = \sqrt{g/k}\sqrt{\tanh(kh)} \tag{1}$$

Dypvannstilnærmingen:

$$\omega^2 = gk$$

$$\Rightarrow \quad v_{f,Dyp} = \sqrt{g/k} \tag{2}$$

(2) dividert på (1) gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(kh)}} \tag{3}$$

$\underline{h = \lambda/3}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $kh = 2\pi/3$ som gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{tanh(2\pi/3)}} = \frac{1}{\sqrt{0.970}} \approx 1.015$$

som betyr at $v_{f,Dyp}$ er $\underline{\underline{\text{1.5\% for stor}}}$ når $h = \lambda/3$.

$\underline{h = \lambda/2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $kh = \pi$ som gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{tanh(\pi)}} = \frac{1}{\sqrt{0.996}} \approx 1.002$$

som betyr at $v_{f,Dyp}$ er $\underline{\underline{\text{0.2\% for stor}}}$ når $h = \lambda/2$.

b)

$$\omega^2 = gk \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

og

$$\underline{\underline{v_g}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(gk)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}v_f}} \quad q.e.d. \tag{4}$$

c) For dypt vann har vi $\omega^2 = gk$ som gir:

$$\lambda = 2\pi g/\omega^2 = \frac{g}{2\pi}T^2 = \begin{cases} 352 \text{ m} & \text{for } T = 15 \text{ s} \\ 156 \text{ m} & \text{for } T = 10 \text{ s} \end{cases}$$

Altså er betingelsene for dypvannstilnærmelsen oppfylt. Dermed:

$$v_g = \frac{1}{2} v_f = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{T}$$

Tid som brukes fra Bjørnøya til Nordkapp (dvs. på lengden $L = 300$ km):

$$\Delta t = \frac{L}{v_g} = \frac{2LT}{\lambda} = \begin{cases} 25.6 \cdot 10^3 \text{ s} \ \approx \underline{\underline{7.1 \text{ timer}}} & \text{for T} = 15 \text{ s} \\ 38.5 \cdot 10^3 \text{ s} \ \approx \underline{\underline{10.7 \text{ timer}}} & \text{for T} = 10 \text{ s} \end{cases}$$

Løsning oppgave 2

a)

$$v_f^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = k^2 v_f^2 \approx k^2 \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho_1} k \right) = gk + \frac{\gamma}{\rho_1} k^3 \tag{5}$$

Ved å ta differensialet på begge sider av (5), får vi

$$2\omega \, d\omega = \left(g + \frac{3\gamma}{\rho_1} k^2 \right) dk \tag{6}$$

Fra (6) har vi:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho_1}{2\omega} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{2\omega^2} \\ &= \frac{v_f}{2} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{\omega^2} \overset{(5)}{=} \frac{v_f}{2} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{gk + \gamma k^3/\rho_1} \\ &= \underline{\underline{\frac{v_f}{2} \left(1 + \frac{2}{1 + \rho_1 g/\gamma k^2} \right)}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} v_f &\approx \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho_1} \right)^{1/2} \\ &\approx \left(\frac{9.8 \cdot 10^{-2}}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} \cdot 1000} \right)^{1/2} \ \text{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{0.24 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_g &\approx \frac{0.24}{2} \ \text{m/s} \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{1000 \cdot 9.8}{7.3 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{2\pi}{10^{-2}}\right)^2}} \right) \\ &\approx \underline{\underline{0.30 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

c) Vi finner minimum fasefart v_f ved:

$$\frac{dv_f^2}{dk} = 0$$

(fordi v_f er positiv og fasefarten har ett minimum og ingen maksimum) Dvs:

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho_1}k\right) = -\frac{g}{k^2} + \frac{\gamma}{\rho_1} = 0$$

som gir

$$k = \left(\frac{g\rho_1}{\gamma}\right)^{1/2} = \left(\frac{9.8 \cdot 1000}{7.3 \cdot 10^{-2}}\right)^{1/2} \text{ m}^{-1} \approx 366 \text{ m}^{-1}$$

Dvs. fasefarten har minimum for

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx \underline{\underline{17 \text{ mm}}}$$

Løsning oppgave 3 (Eksamen SIF4014 7/12-2001)

a)

$$v_f = \left(\frac{2\pi\gamma}{\lambda(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2} \lambda^{-1/2} = 2.138 \cdot 10^{-2} \,\frac{\text{m}^{3/2}}{s} \cdot \lambda^{-1/2} \tag{7}$$

For $\lambda = 1.00$ mm:

$$v_f = 0.676 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{0.68 \text{ m/s}}}$$

For $\lambda = 0.100$ mm:

$$\underline{\underline{v_f = 2.14 \text{ m/s}}}$$

b)

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2} k^{1/2} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2} k^{3/2}}} \qquad \text{q.e.d.} \tag{9}$$

c)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2} k^{1/2} \tag{10}$$

Sammenligning mellom (8) og (10) gir:

$$\underline{\underline{v_g = \frac{3}{2} v_f}} \tag{11}$$

d) Vi kaller lengden av bølgetoget for L. Det vil da bruke tiden $t = L/v_g$ på å passere et punkt $x = x_1$. På denne tiden vil:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{\lambda_0/v_f} = \frac{L/v_g}{\lambda_0/v_f} = \frac{L}{\lambda_0}\frac{v_f}{v_g} = \frac{2}{3}\frac{L}{\lambda_0}$$

klare bølgetopper passere $x = x_1$. Definerer vi lengden av bølgetoget til å være $L = 12\lambda_0$, får vi:

$$n = \frac{2}{3}\frac{L}{\lambda} = \underline{\underline{8}}$$