



Eksamen i TFY4160 BØLGEFYSIKK

Mandag, 7. august, 2006
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle sprogutgaver).

O.H. Jahren og K.J. Knudsen: *Formelsamling i matematikk*.

Tosidig håndskrevet ark med formler.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1

Vi tar for oss en uendelig lang streng med massetetthet μ og snordrag F_T . Det går transversale bølger langs strengen. Disse har små utslag slik at bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \vec{D}(x, t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \vec{D}(x, t)}{\partial t^2} ,$$

gjelder. Her er $\vec{D}(x, t)$ det transversale utslaget av strengen i punktet x og ved tiden t . Videre er $K = \mu/F_T$ en konstant.

- a) Hva vil det si at denne bølgen kan sirkulærpolariseres?
- b) Vi antar i resten av oppgaven at bølgen er polarisert i y -retningen. Vi har en harmonisk vandreølge

$$D_y(x, t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \phi) .$$

Her er $k = 2\pi/\lambda$ der λ er bølgelengden og $\omega = 2\pi\nu$ der ν er frekvensen. ϕ er en vilkårlig fasefaktor. Vi setter $\lambda = 200\text{m}$ og $\nu = 0,016\text{Hz}$. Hva er fasehastigheten? Hva er relasjonen mellom fasehastigheten og massetettheten μ ?

- c) Vis at i dette systemet er gruppehastighet og fasehastighet like. Hva kalles denne egenskapen?

La oss nå anta at strengen svinger i luft som er overmettet med vanndamp. Det betyr at jo langsommere strengen svinger, jo høyere blir den effektive massetettheten μ til den siden mer og mer vann har anledning til å kondensere på strengen. La oss anta at

$$\mu(\nu) = \frac{\mu_0}{1 + (\nu_0/\nu)^2} ,$$

der μ_0 og ν_0 er konstanter. Vi antar videre at relasjonen mellom μ og fasehastigheten forblir uendret i forhold til punkt c) over. Vis at dispersjonsrelasjonen blir

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}} k \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \mu_0 \nu_0^2}{F_T k^2}} \right]^{1/2}.$$

- d) Forklar hvordan denne dispersjonsrelasjonen oppfører seg ved korte bølgelengder. Gi en fysisk begrunnelse for denne oppførselen.

Oppgitt formel for denne oppgaven: $v_g = d\omega/dk$.

Oppgave 2

Maxwells ligninger er

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

og

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

- a) Utled fra Maxwells ligninger bølgeligningen for elektriske felt,

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

og for magnetiske felt,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Vi antar en lysstråle som forplaner seg som en harmonisk planbølge i vakuum. Den er gitt ved

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_E)$$

og

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_B)$$

- b) Forklar hvorfor $\vec{k}/|\vec{k}|$ angir forplantningsretningen til denne planbølgen.
- c) Bruk Maxwells første ligning, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ til å vise at $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, hvor \vec{k} . Bruk Maxwells andre ligning til å vise tilsvarende resultat for magnetfeltet. Hva sier dette om longitudinelle lysbølger?

- d) Bruk Maxwells ligninger til å vise at

$$E_0 \perp B_0$$

for denne planbølgen.

- e) Vis til sist at

$$cB = E$$

for denne bølgen.

Du får sikkert bruk for $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$.

Oppgave 3

Lorentz-transformasjonene mellom to inertielle referanse-systemer som beveger seg med relativhastighet $v = 1/2$ er

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \Delta t &= \frac{v\Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}$$

Vi har brukt naturlige enheter i disse formelene slik at lyshastigheten er 1 og tid måles i meter.

- a) Når lyshastigheten i SI-enheter er $c = 2,997925 \times 10^8$ meter per sekund, hva er $4,5 \times 10^{-5}$ sekunder regnet om til naturlige enheter der tid måles i meter?
- b) Beskriv med ord hva Lorentztransformasjonene brukes til i den spesielle relativitetsteorien. Hva er Δx , Δt , $\Delta x'$ og $\Delta t'$?

Vi vil i det følgende kalle (t, x) -systemet for *laboratorie-systemet* og (t', x') -systemet for *rakett-systemet*.

- c) Vi antar at en stav med lengde l' ligger i ro relativt til rakett-systemet. Vis at staven vil ha en lengde $l = (\sqrt{3}/2)l'$ i laboratoriesystemet.

Siden staven i det laboratoriet kun har en lengde på $l = (\sqrt{3}/2)l' \approx 0.87l'$, vil den passe inn i en boks med lengde $l_e = (9/10)l$. Legg merke til at $l < l_e$. Boksen har lokk i begge ender som kan lukkes raskt. La oss anta de er åpne, og i det øyeblikket hele staven er inne i boksen, lukker vi igjen begge lokkene.

Sett fra rakett-systemet har staven lengde l og det er *boksen* som er Lorentz-kontraktet. Den har en lengde i dette systemet på $l'_e = (\sqrt{3}/2)l_e$. Det vil si at $l'_e < l'$: Staven er i dette systemet *lengre* enn boksen og kan da ikke lukkes inne i den.

Her har vi et paradoks. I laboratorie-systemet har vi lukket staven inne i boksen, mens i rakett-systemet er staven for lang i forhold til boksen og den kan ikke lukkes inne i den. Vi skal nå rydde opp i dette.

- d) Vis ved hjelp av Lorentz-transformasjonene at tidsforskjellen mellom lukking av lokkene foran og bak staven i rakett-systemet er $\Delta t' = -l_e/\sqrt{3}$ når lukkingen av de to lokkene skjer simultant i laboratoriesystemet.

- e) Hvilket lokk ble lukket først i rakettsystemet? Begrunn svaret.
- f) Hvor er bakenden av staven når front-lokket lukkes i rakettsystem og hvor er frontenden av staven når lokket bak lukkes i rakettsystemet? (Svar kun kvalitativt — men legg vekt på hvordan dette løser paradokset.)