

Løsning Øving 5

Løsning oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}\omega^2 &= gk \tanh(kh) \\ \Rightarrow \quad v_f &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} = \sqrt{g/k} \sqrt{\tanh(kh)}\end{aligned}\quad (1)$$

Dypvannstilnærmingsen:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= gk \\ \Rightarrow \quad v_{f,Dyp} &= \sqrt{g/k}\end{aligned}\quad (2)$$

(2) dividert på (1) gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(kh)}}\quad (3)$$

 $h = \lambda/3$ $\Rightarrow kh = 2\pi/3$ som gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(2\pi/3)}} = \frac{1}{\sqrt{0.970}} \approx 1.015$$

som betyr at $v_{f,Dyp}$ er 1.5% for stor når $h = \lambda/3$. $h = \lambda/2$ $\Rightarrow kh = \pi$ som gir:

$$\frac{v_{f,Dyp}}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(\pi)}} = \frac{1}{\sqrt{0.996}} \approx 1.002$$

som betyr at $v_{f,Dyp}$ er 0.2% for stor når $h = \lambda/2$.

b)

$$\omega^2 = gk \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

og

$$\underline{\underline{v_g}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(gk)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}v_f}} \quad q.e.d. \quad (4)$$

c) For dypt vann har vi $\omega^2 = gk$ som gir:

$$\lambda = 2\pi g/\omega^2 = \frac{g}{2\pi}T^2 = \begin{cases} 352 \text{ m} & \text{for } T = 15 \text{ s} \\ 156 \text{ m} & \text{for } T = 10 \text{ s} \end{cases}$$

Altså er betingelsene for dypvannstilnærmelsen oppfylt. Dermed:

$$v_g = \frac{1}{2}v_f = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{T}$$

Tid som brukes fra Bjørnøya til Nordkapp (dvs. på lengden $L = 300$ km):

$$\Delta t = \frac{L}{v_g} = \frac{2LT}{\lambda} = \begin{cases} 25.6 \cdot 10^3 \text{ s} \approx \underline{\underline{7.1 \text{ timer}}} & \text{for } T = 15 \text{ s} \\ 38.5 \cdot 10^3 \text{ s} \approx \underline{\underline{10.7 \text{ timer}}} & \text{for } T = 10 \text{ s} \end{cases}$$

Løsning oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} v_f^2 &= \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad \omega^2 &= k^2 v_f^2 \approx k^2 \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho_1} k\right) = gk + \frac{\gamma}{\rho_1} k^3 \end{aligned} \quad (5)$$

Ved å ta differensialet på begge sider av (5), får vi

$$2\omega d\omega = \left(g + \frac{3\gamma}{\rho_1} k^2\right) dk \quad (6)$$

Fra (6) har vi:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho_1}{2\omega} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{2\omega^2} \\ &= \frac{v_f}{2} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{\omega^2} \stackrel{(5)}{=} \frac{v_f}{2} \cdot \frac{gk + 3\gamma k^3/\rho_1}{gk + \gamma k^3/\rho_1} \\ &= \underline{\underline{\frac{v_f}{2} \left(1 + \frac{2}{1 + \rho_1 g/\gamma k^2}\right)}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} v_f &\approx \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho_1}\right)^{1/2} \\ &\approx \left(\frac{9.8 \cdot 10^{-2}}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} \cdot 1000}\right)^{1/2} \text{ m/s} \\ &\approx \underline{\underline{0.24 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_g &\approx \frac{0.24}{2} \text{ m/s} \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{1000 \cdot 9.8}{7.3 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{2\pi}{10^{-2}}\right)^2}}\right) \\ &\approx \underline{\underline{0.30 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

c) Vi finner minimum fasefart v_f ved:

$$\frac{dv_f^2}{dk} = 0$$

(fordi v_f er positiv og fasefarten har ett minimum og ingen maksimum) Dvs:

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho_1} k \right) = -\frac{g}{k^2} + \frac{\gamma}{\rho_1} = 0$$

som gir

$$k = \left(\frac{g\rho_1}{\gamma} \right)^{1/2} = \left(\frac{9.8 \cdot 1000}{7.3 \cdot 10^{-2}} \right)^{1/2} \text{ m}^{-1} \approx 366 \text{ m}^{-1}$$

Dvs. fasefarten har minimum for

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx \underline{\underline{17 \text{ mm}}}$$

Løsning oppgave 3 (Eksamen SIF4014 7/12-2001)

a)

$$v_f = \left(\frac{2\pi\gamma}{\lambda(\rho_1 + \rho_2)} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} \lambda^{-1/2} = 2.138 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^{3/2}}{\text{s}} \cdot \lambda^{-1/2} \quad (7)$$

For $\lambda = 1.00 \text{ mm}$:

$$v_f = 0.676 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{0.68 \text{ m/s}}}$$

For $\lambda = 0.100 \text{ mm}$:

$$\underline{\underline{v_f = 2.14 \text{ m/s}}}$$

b)

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{1/2} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{3/2} \quad \text{q.e.d.}}} \quad (9)$$

c)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{1/2} \quad (10)$$

Sammenligning mellom (8) og (10) gir:

$$\underline{\underline{v_g = \frac{3}{2}v_f}} \quad (11)$$

d) Vi kaller lengden av bølgetoget for L . Det vil da bruke tiden $t = L/v_g$ på å passere et punkt $x = x_1$. På denne tiden vil:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{\lambda_0/v_f} = \frac{L/v_g}{\lambda_0/v_f} = \frac{L}{\lambda_0} \frac{v_f}{v_g} = \frac{2}{3} \frac{L}{\lambda_0}$$

klare bølgetopper passere $x = x_1$. Definerer vi lengden av bølgetoget til å være $L = 12\lambda_0$, får vi:

$$n = \frac{2}{3} \frac{L}{\lambda_0} = \underline{\underline{8}}$$