Bølgekompendiet

Andreas, Jonas, Jostein, Pål og Sigrid

1. september 2007

Innhold

1 Svingninger **1**

1.1 Udempet svingning 1
1.2 Dempet svingning og energitap 3
1.3 Tvungen svingning 6
1.4 Analoge størrelser i elektronikk og mekanikk 8

2 Transversale mekaniske bølger **10**

2.1 Hva er en bølge? Størrelser og begreper 10
2.2 Bølgelikninga 11
2.3 Energi transportert med bølge 14
2.4 Refleksjon, transmisjon og stående bølger på streng 17
2.5 Flerdimensjonale bølger 22
2.6 Dispersjon og gruppehastighet 24

3 Lyd - longitudinale mekaniske bølger **26**

3.1 Longitudinal bølge 26
3.2 Impuls transportert med bølge 27
3.3 Lydbølger i ulike medier 29
3.4 Refleksjon, transmisjon og stående lydbølger 33
3.5 Dopplereffekt 37
3.6 Sjokkbølger 40
3.7 Svevning 41

4 Elektromagnetiske bølger **43**

4.1 Ampere-Maxwells lov 43
4.2 Maxwells likninger på differensialform 45
4.3 Bølgelikningen for E og B 47
4.4 Egenskaper ved elektromagnetiske bølger 48
4.5 Energi og impuls 50
4.6 Stråling 52
4.7 Polarisering 55
4.8 Elektromagnetiske bølger i stoff 57
4.9 Refleksjon og transmisjon av elektromagnetiske bølger 59

5 Optikk **62**

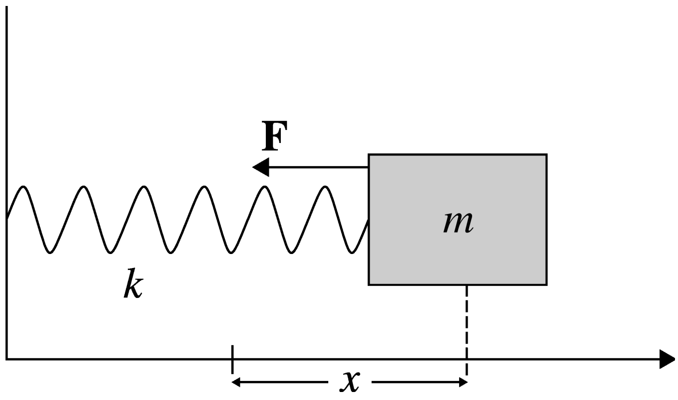
5.1 Geometriske problemer 62
5.2 Fermats prinsipp 67
5.3 Huygens' prinsipp 68
5.4 Regnbuen 70
5.5 Interferens 74
5.6 Diffraksjon 75

6 Spesiell relativitetsteori **79**

6.1 Hendelser og inertialsystemer 79
6.2 Michelson-Morleyeksperimentet 80
6.3 Einsteins to postulater 83
6.4 Samtidighet 84
6.5 Måling av lengder normalt på fartsretningen 84
6.6 Tidsdilatasjon 85
6.7 Lengdekontrasjon 86
6.8 Lorentztransformasjonen 87
6.9 Addisjon av hastigheter 89
6.10 Impuls, kraft og energi 91
6.11 Dopplereffekt 93

1 Svingninger

1.1 Udempet svingning



Figur 1.1: Enkel harmonisk oscillator

Vi skal se på et masse-fjær system der fjæra følger Hookes lov,

$$F = -kx, \tag{1.1}$$

der x er utsvinget fra fjæras likevektsposisjon og k er fjærkonstanten til fjæra. Krafta fra fjæra er den eneste som virker, så dette er et eksempel på en *harmonisk oscillator*. Vi setter opp Newtons andre lov og får bevegelseslikninga for massen[1]:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.2}$$

Dette er en andre ordens homogen differensiallikning for x, og løsningen er

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{1.3}$$

der A og ϕ er to integrasjonskonstanter som må bestemmes ved hjelp av to initialbetingelser. Tabell 1 gir en oversikt over størrelser som beskriver svingninger.

Energi i svingebevegelsen

Oscillatoren har både potensiell og kinetisk energi. Den potensielle energien kan vi finne ved å beregne arbeidet vi gjør mot krafta F:

$$E_p = W = -\int_0^x (-kx')dx' = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.4}$$

[1] Prikk over et symbol, slik som $\dot{x}$, betyr derivasjon med hensyn på *tida*. To prikker er derivasjon to ganger med hensyn på tida.

Tabell 1: Viktige størrelser for svingninger.

A	Amplitude, det maksimale utsvinget
$\omega = 2\pi\nu$	Vinkelfrekvens
$\nu = \omega/2\pi = 1/T$	Frekvens, antall svingninger per sekund
$T = 1/\nu$	Periode, tiden det tar å fullføre en svingning
$\omega t + \phi$	Fasen (argumentet til sinus- eller cosinusfunksjonen)
ϕ	Fasekonstanten

Setter vi inn for x, blir den potensielle energien til oscillatoren

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)\,. \tag{1.5}$$

For å regne ut den kinetiske energien trenger vi hastigheten til massen,

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)\,.$$

Den kinetiske energien blir da (vi setter inn for ω underveis)

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)\,. \tag{1.6}$$

Den totale energien blir (vi bruker identiteten $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2. \tag{1.7}$$

Energien er konstant i dette systemet. Det må den være, siden den eneste krafta som virker (fjærkrafta) er konservativ. Energien veksler mellom bare potensiell energi når utslaget er maksimalt, og bare kinetisk energi når massen er i likevektsposisjonen.

Konstante krefter og oscillatorer

Vi skal se på hva som skjer hvis det virker en konstant kraft F_0 mot høyre på massen i tillegg til krafta fra fjæra (dette kan for eksempel være tyngdekrafta). Bevegelseslikninga blir da

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}(kx - F_0) = 0.$$

Dette er en inhomogen differensiallikning – den er ikke på samme form som (1.2). Vi kan få den over på homogen form ved å gjøre erstatningen $x \to x + x_0$. Det svarer til å flytte nullpunktet for x en lengde x_0 mot høyre. Siden x_0 er en konstant, påvirker den ikke $\ddot{x}$-leddet. Vi får

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}(kx + kx_0 - F_0) = 0.$$

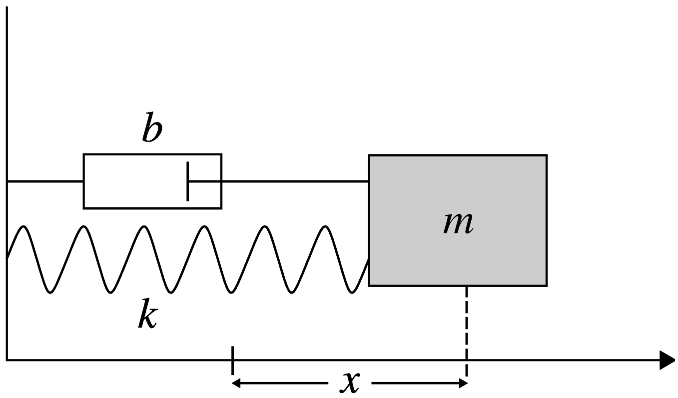
Ved å velge x_0 slik at $kx_0 = F_0$ får vi en homogen likning:

$$x \to x + x_0, \qquad x_0 \equiv \frac{F_0}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.8}$$

Denne likninga er identisk med likning (1.2), og har selvfølgelig også de samme løsningene. Det forteller oss at en konstant kraft bare flytter likevektsposisjonen til en harmonisk oscillator en lengde $x_0 \equiv F_0/k$. De andre parametrene for svingebevegelsen, som frekvens, amplitude og faseforskyvning, påvirkes ikke av konstante krefter.

1.2 Dempet svingning og energitap

Ideelle oscillatorer uten dempning som den vi så på i forrige avsnitt, er vanskelige å sette opp i praksis. Det vil som regel være en viss dempning som får amplituden til å avta etter hvert som tida går. Vi skal anta at vi har en dempningskraft som er proporsjonal med hastigheten til oscillatoren (denne antagelsen er ikke alltid særlig god i praksis).



Figur 1.2: Dempet oscillator

Vi skal igjen finne bevegelseslikninga for massen. Dempningskrafta er $-b\dot{x}$, så denne gangen er summen av kreftene som virker $-kx - b\dot{x}$. Det gir bevegelseslikninga

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

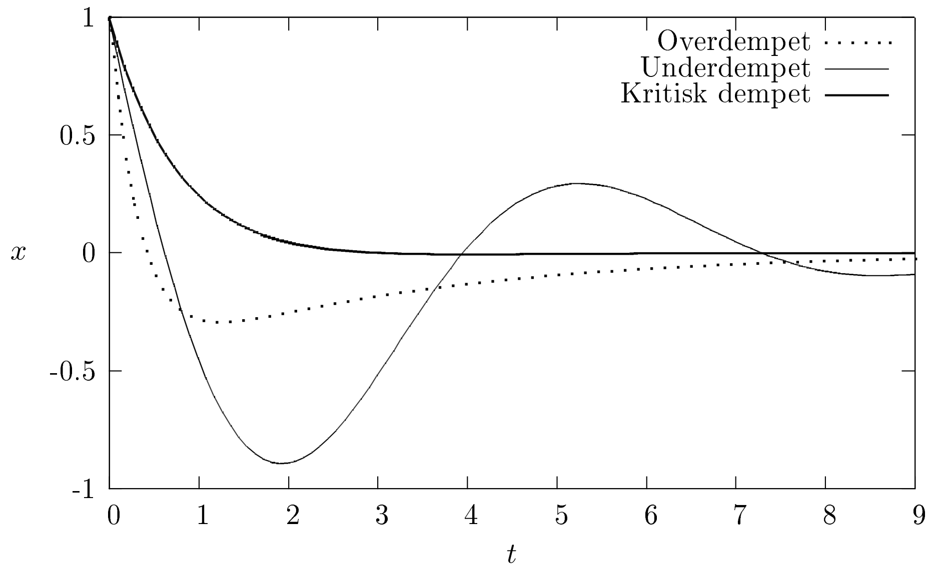
Vi skal innføre noen hjelpestørrelser for å forenkle regningen:

$$\delta \equiv \frac{b}{2m}, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.9}$$

Bevegelseslikninga vår tar da formen

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.10}$$

Løsningen på differensiallikninga kan ta tre forskjellige former. Forholdet mellom δ og ω_0 avgjør hvilken form den tar[2]. Eksempler på de tre tilfellene er plottet i figur 1.3. Felles for alle de tre tilfellene er at $x(t) \to 0$ når $t \to \infty$. Det skyldes at amplituden avtar i alle tre tilfellene. At amplituden avtar betyr også at systemet avgir energi til omgivelsene, for eksempel som friksjonsvarme.



Figur 1.3: Utsving som funksjon av tida.

$\delta < \omega_0$: Underdempet system

Dette er det klart mest interessante tilfellet for oss. Løsningen er

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi) . \tag{1.11}$$

Dette er en svingebevegelse, men det er to viktige forskjeller fra den udempede svingebevegelsen. Sammenlikner vi likning (1.11) med løsningen for den udempede svingningen, likning (1.3), finner vi forskjellene:

- *Amplituden er ikke konstant.* Vi kan se på den dempede svingningen som en svingning med en tidsavhengig amplitude – amplituden A i den udempede svingningen har blitt byttet ut med $Ae^{-\delta t}$. Dette viser at energien ikke er bevart, og sørger for at svingningene vil dempes helt til massen står stille i likevektsposisjonen. Men før den slår seg til ro, vil den ha passert gjennom likevektsposisjonen et uendelig antall ganger.

[2] De matematiske detaljene er pensum tidligere mattekurs. Du kan for ekempel finne dem i E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathemathics.*

- *Frekvensen er redusert sammenliknet med det udempede systemet.* For den dempede svingningen er vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$, mens det udempede systemet har vinkelfrekvens $\omega = \omega_0$. Dette er ikke så overraskende: Dempningen er en kraft som hindrer bevegelsen, altså gjør den systemet tregere. Her kalles ω_0 systemets *egenfrekvens* – frekvensen systemet ville ha hatt uten dempning.

$\delta > \omega_0$: Overdempet system

Den generelle løsningen er

$$x(t) = Ae^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)} + Be^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)}, \tag{1.12}$$

der A og B er integrasjonskonstanter. I dette tilfellet er dempningen for stor til at vi får noen svingebevegelse. Massen passerer likevektsposisjonen maksimalt én gang før den stabiliserer seg der.

$\delta = \omega_0$: Kritisk dempet system

Løsningen er

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\delta t}, \tag{1.13}$$

der A og B er integrasjonskonstanter. Heller ikke her har vi noen svingebevegelse, og som for det overdempede tilfellet passerer massen likevektsposisjonen maksimalt én gang.

Energitap i underdempede svingninger

Vi har tidligere slått fast at det må være et energitap i dempede svingninger. For å se på størrelsen til energitapet skal vi bruke sammenhengen mellom amplitude og energi vi fant i likning (1.7), men vi skal erstatte A med $Ae^{-\delta t}$; vi tar altså hensyn til at amplituden i svingningene avtar:

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\delta t} \tag{1.14}$$

For å beskrive energitapet i en dempet svingning brukes gjerne *godhetsfaktoren Q*. Den er definert som

$$Q = \omega_0 \frac{E}{P_{tap}}, \tag{1.15}$$

der E er energien i svingningen og P_{tap} er energitapet per tidsenhet. E har vi i likning (1.14). Siden P_{tap} er (den negative) energiendringen per tidsenhet, kan vi finne P_{tap} ved å derivere $E(t)$ med hensyn på tida:

$$P_{tap} = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} k A^2 \left(-2\delta e^{-2\delta t}\right) = k A^2 \delta e^{-2\delta t}$$

Vi setter inn dette resultatet sammen med likning (1.14) i likning (1.15) og får

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{m\omega_0}{b}. \tag{1.16}$$

En stor verdi for Q betyr at energitapet per periode av svingningen er lite. Det er verdt å legge merke til at alle svingesystemer har $Q > \frac{1}{2}$. Systemer med $Q < \frac{1}{2}$ er overdempede, mens et system med $Q = \frac{1}{2}$ er et kritisk dempet system.

1.3 Tvungen svingning

Da dempning i et svingesystem fører til at svingningen dør ut på grunn av energitap til omgivelsene, er det ikke uvanlig å ha en påtrykt kraft i systemet som holder svingebevegelsen ved like. Vi skal nå se på situasjonen hvor det både virker en dempningskraft og en påtrykt kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$ på massen. Bevegelseslikninga blir da

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t), \tag{1.17}$$

hvor $\delta \equiv b/2m$ og $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$, som tidligere. Dette er en andre ordens inhomogen differensiallikning med generell løsning

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

hvor $x_h(t)$ er den generelle løsningen til den tilsvarende homogene differensiallikninga, $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, og $x_p(t)$ er en *partikulærløsning* av den inhomogene likninga. Siden den påtrykte krafta har sinusform, har partikulærløsningen også det. Vi gjetter på

$$x_p(t) = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \tag{1.18}$$

som partikulærløsning. Ved innsetting av $x_p(t)$ i likning (1.17) kan det vises at dette valget av x_p løser likninga, forutsatt at vi velger

$$A_f = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_f^2}} \tag{1.19}$$

og

$$\phi_f = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{2\delta\omega_f}\right) - \frac{\pi}{2}. \tag{1.20}$$

Den endelige løsningen blir summen av homogenløsningen og partikulærløsningen:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi) + A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \tag{1.21}$$

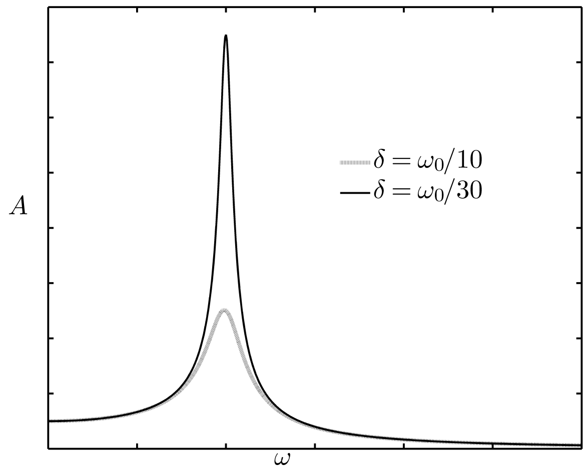
Det er verdt å merke seg at $x_h(t)$ alltid vil inneholde faktoren $\exp(-\delta t)$, og dermed vil $x_h(t) \approx 0$ etter tilstrekkelig lang tid ($t \gg 1/\delta$). Vi står da igjen med

$$x(t) = A_t \cos(\omega_t t + \phi_t) \qquad \text{for} \qquad t \gg \frac{1}{\delta}, \tag{1.22}$$

som vi kjenner igjen som partikulærløsningen. Som oftest er det denne løsningen vi er mest interessert i, siden "tilstrekkelig lang tid" ofte kan være ganske kort tid, for eksempel for elektroniske kretser (se kapittel 1.4), eller svingesystemet kan ha svært liten energi før den påtrykte krafta begynner å virke, slik at svingningene som skyldes krafta uansett dominerer.

Resonans

Av likning (1.19) ser vi at massen vil svinge med en amplitude A_f som avhenger av frekvensen ω_f til den påtrykte krafta $F(t)$. Her er det verdt å merke seg at amplituden A_f på utsvinget er størst dersom frekvensen ω_f til påtrykt kraft er omtrent lik systemets egenfrekvens ω_0. Denne effekten kaller vi *resonans*. Figur 1.4 viser amplituden som funksjon av frekvensen ω_f for forskjellig dempning δ.



Figur 1.4: Amplitude A_f som funksjon av frekvensen ω_f til påtrykt kraft F

Har vi et system helt uten dempning ($\delta = 0$), vil $A(\omega_0) \to \infty$. Dette betyr at alt arbeid som er utført av den påtrykte kraften F er gått med til å øke oscillatorens energi. Altså vil oscillatorens utsving og energi bli uendelig store etter hvert som tiden går ($t \to \infty$).

Massens hastighet er $\dot{x}(t) = -A_f \omega_f \sin(\omega_f t + \phi_f)$. Når $\omega_f = \omega_0$ (resonans), er fasevinkelen $\phi_f = -\pi/2$, slik at den påtrykte krafta ligger en kvart periode foran utslaget. Setter vi inn $\phi_f = -\pi/2$, blir massens hastighet

$\dot{x}(t) = A_f \omega_f \cos(\omega_f t)$. Vi ser at effekten blir

$$P(t) = F(t) \cdot \dot{x}(t) = \omega_f A_f F_0 \cos^2 \omega_f t. \tag{1.23}$$

Vi ser at effekten alltid er postiv – med kraftas fase en halv periode foran farten vil krafta alltid virke i samme retning som farta, og dermed øke farta. Da er *midlere* effekt $\langle P \rangle$ maksimal.

Båndbredden (også kalt halvverdibredden, på engelsk bandwidth) $\Delta\omega$ er definert som bredden av ***effektkurven*** i høyden $\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{P}_{\text{res}}$. Uttrykt ved amplituden tilsvarer det $A_f = A_{f,\max}/\sqrt{2}$, siden $\bar{P} \propto A_f^2$. Båndbredden er et mål for skarpheten i toppen på resonanskurven og sier noe om hvor følsomt systemet er for resonans – jo mindre båndbredde, jo mer følsomt er systemet. For systemer med svak dempning, $\delta \ll \omega_0$, har vi at

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q} \tag{1.24}$$

hvor Q er godhetsfaktoren. Innsetting i likning (1.19) viser at forholdet mellom amplitude ved resonans og amplitude for lave verdier av ω_f er

$$\frac{A_f(\omega_0)}{A_f(0)} = Q. \tag{1.25}$$

Setter vi sammen likning (1.24) og (1.25) får vi

$$A_f(\omega_0)\Delta\omega_f = A_f(0)\omega_0. \tag{1.26}$$

Venstresida er produktet av høyden og bredden til resonanstoppen, mens høyresida er to konstanter. Dette forteller oss at arealet under resonanstoppen er tilnærmet konstant, uavhengig av om kurven er høy og smal eller lav og bred.

Setter vi sammen likning (1.24) med definisjonen av Q i likning (1.15), får vi

$$\Delta\omega \propto \frac{P_{\text{tap}}}{E}. \tag{1.27}$$

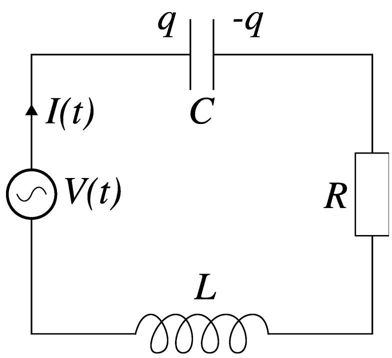
Dette betyr at jo mer følsomt systemet er for resonans, jo mindre er det relative energitapet.

1.4 Analoge størrelser i elektronikk og mekanikk

Vi tar for oss en enkel elektrisk krets med en seriekobling av en motstand R, en kapasitans C og en induktans L, hvor strømmen drives av en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega_f t$ (en såkalt RCL-krets, se figur 1.5). Kirchhoffs spenningsregel[3] anvendt på denne kretsen gir differensiallikninga

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V \cos \omega t. \tag{1.28}$$

[3]Kirchhoffs spenningsregel sier at summen av alle spenningsfall over en lukket krets er lik null.



Figur 1.5

Sammenlikner vi denne med likning (1.17) fra forrige delkapittel ser vi at disse er helt identiske likninger. Altså varierer ladningen q på kondensatoren i RCL-kretsen på samme måte som utsvinget x til massen i det mekaniske systemet. Vi ser ved direkte sammenlikning at m og L er *analoge* størrelser i de to systemene. Det samme gjelder for k og $1/C$. Tabell 2 viser samtlige analoge størrelser for disse to systemene.

Tabell 2: Analoge størrelser i elektronikk og mekanikk.

Mekanisk størrelse		Elektrisk størrelse	
masse	m [kg]	induktans	L [H]
dempning	b [Ns/m]	motstand	R [Ω]
fjærkonstanten	k [N/m]	invers kapasitans	$1/C$ [1/F]
kraft	F [N]	spenning	V [V]
posisjon	x [m]	ladning	q [C]
hastighet	v [m/s]	strøm	I [A]

Slik det mekaniske systemet har en egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, vil den elektriske kretsen ha en egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Dersom resistansen R i kretsen er liten (hvilket svarer til liten dempning b for det mekaniske systemet), vil vi få spesielt stor strømstyrke når spenningskilden har en frekvens ω_f omtrent lik kretsens egenfrekvens. Altså får vi også her resonans. Resonanskurven vil også for det elektriske systemet kunne beskrives ved godhetsfaktoren, og fra godhetsfaktoren for det mekaniske systemet i likning (1.16) og analogiene i tabell 2 følger det at

$$Q = \frac{L \cdot 1/\sqrt{LC}}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \tag{1.29}$$

er godhetsfaktoren for det elektriske systemet.

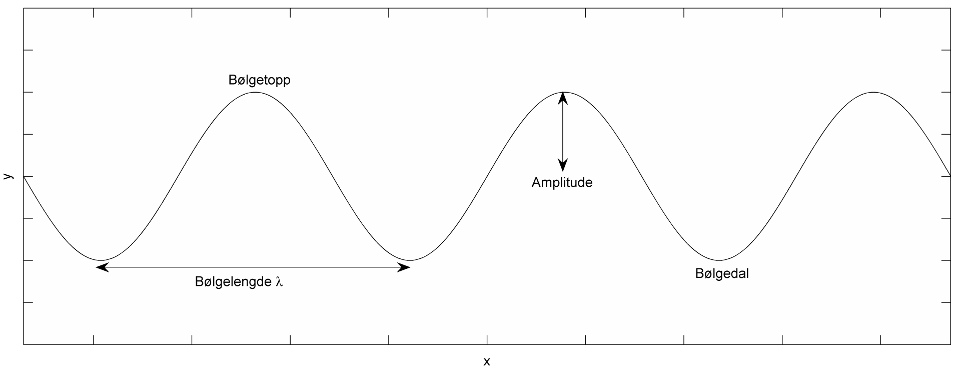
2 Transversale mekaniske bølger

Musikk, jordskjelv og bølger på en vannoverflate – bølgebevegelse er et utstrakt fenomen i naturen. Bølger oppstår dersom et system blir skjøvet ut av likevekt, og denne forstyrrelsen forplanter seg og vandrer fra et sted i systemet til et annet.

2.1 Hva er en bølge? Størrelser og begreper

En bølge er en forplantning av svingninger. Når en bølge forplanter seg i et medium, svinger mediets partikler fram og tilbake rundt en likevektsposisjon. Det er imidlertid viktig å merke seg at det er *energi* og *bevegelsesmengde*, og ikke partiklene i seg selv, som forplanter seg med bølgen. En bølge er en energitransport. Når bølgen når frem til en partikkel i mediet, mottar denne energi og blir satt i svingninger omkring sin likevektsposisjon. I neste øyeblikk blir denne energien overført til neste partikkel i bølgens forplantningsretning, osv. Dersom partiklenes svingninger er vinkelrett på bølgens forplantningsretning, kalles bølgen *transversal*. Er partiklenes svingeretning parallell med bølgens forplantningsretning, kalles bølgen *longitudinal*.

Når vi skal snakke om bølger, har vi nytte av å definere, eller redefinere, en del begreper. Akkurat som vi snakket om harmoniske svingninger, kan vi snakke om harmoniske bølger. Dette er bølger som lar seg beskrive med en cosinus- eller sinusfunksjon.



Figur 2.1

Figur 2.1 viser et øyeblikksbilde av en transversal sinusbølge på en uendelig lang streng. Her er $y(x, t)$ utsvinget til strengelementet i posisjon x ved tiden t. I figuren finner vi markert

- *amplituden*, maksimalt utsving fra likevekt. Denne er per definisjon en positiv størrelse.

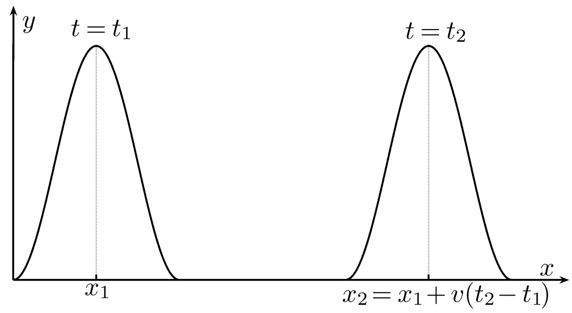
- *bølgelengden* λ, avstanden mellom to strengelementer som oscillerer i fase. Denne kan f.eks. måles som avstanden mellom to bølgetopper.

Andre størrelser som er nyttige for å beskrive denne bølgen er

- *perioden* T, tiden det tar for bølgemønsteret å forflytte seg en bølgelengde.
- *frekvensen* $\nu = 1/T$, som angir antall svingninger som observeres i et gitt punkt x_0 per tidsenhet.
- *hastigheten*, eller *fasehastigheten*, $v = \Delta x/\Delta t = \lambda/T = \lambda\nu$. Navnet fasehastighet kommer av at denne angir hastigheten en bestemt fase, f.eks. en bølgetopp, beveger seg med.
- *partikkelhastigheten* v_p, hastigheten partiklene svinger rundt sine likevektsposisjoner med. For bølgen i figur 2.1 er $v_p = dy/dt$. Partikkelhastigheten har generelt ingen sammenheng med fasehastigheten v, og er generelt svært forskjellig fra denne.

2.2 Bølgelikninga

Vi skal nå se at en og samme likning kan beskrive flere typer bølger. Vi betrakter en uendelig lang streng som er spent opp mellom to faste punkter, og lar en vilkårlig bølgeform forplante seg mot høyre langs strengen. Dersom vi antar at strengen er ideell, dvs. at den beholder sin form og energitapet er tilnærmet lik null, kan vi si noe om hvordan det transversale utsvinget $f(x,t)$ avhenger av x og t.



Figur 2.2: Bølgepuls som forplanter seg mot høyre på uendelig lang streng.

Uten energitap, vil bølgepulsen ha samme form ved (x_2, t_2) som ved (x_1, t_1). Altså må vi forlange at

$$f(x_2, t_2) = f(x_1, t_1) \tag{2.1}$$

hvor

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1). \tag{2.2}$$

Vi antar nå at funksjonen $f(x,t)$ har formen

$$y = f(x - vt). \tag{2.3}$$

Dette medfører

$$f(x_1, t_1) = f(x_1 - vt_1)$$

og

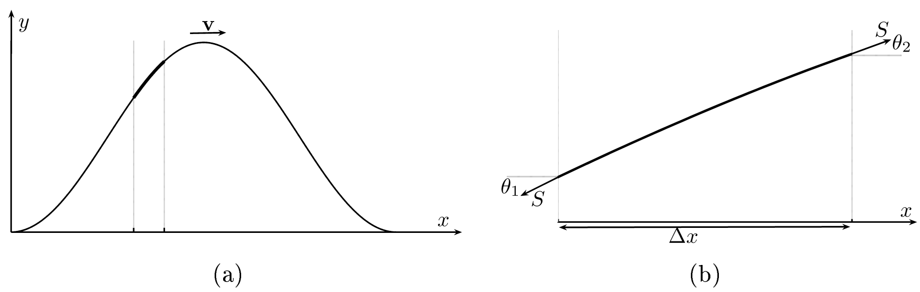
$$\begin{aligned} f(x_2, t_2) &= f(x_2 - vt_2) \\ &= f\left[x_1 + v(t_2 - t_1) - vt_2\right] \\ &= f(x_1, t_1). \end{aligned}$$

Altså har vi at likning (2.1) er tilfredsstilt. Det kommer fram av likning (2.2) at v må oppfattes som hastigheten bølgeformen brer seg i positiv x-retning med.

Når vi nå skal utlede likninga som $y = f(x - vt)$ må være en løsning av, gjør vi en rekke antagelser

- Vi lar μ betegne strengens masse per lengdeenhet.
- S betegner horisontal strekkraft i strengen.
- $S \gg mg$, slik at vi kan se bort fra tyngdekrafta som virker på strengen.
- Strengen har kun transversal bevegelse.
- Vi ser på små utsving y.

Vi tar for oss kreftene som virker på et lite segment Δx av strengen, vist i figur 2.3.



Figur 2.3: Bølgepuls som forplanter seg på streng. Figur b) viser et forstørret utsnitt av det markerte området i figur a).

Ingen bevegelse i x-retning må bety at

$$\begin{aligned} S_{1x} &= S_{2x} \\ \Rightarrow -S_1 \cos\Theta_1 + S_2 \cos\Theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Vi gjør nå nok en antagelse, og sier at begge ledd i likning (2.4) er like store som den horisontale strekkrafta S som virker på strengen når den er i likevekt:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cos\Theta_1 \\ S &= S_2 \cos\Theta_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Anvendelse av Newtons 2. lov i y-retning på strengsegmentet gir

$$\begin{aligned} S_{1y} + S_{2y} &= m\ddot{y} \\ \Rightarrow -S_1 \sin\Theta_1 + S_2 \sin\Theta_2 &= m\ddot{y}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hvert ledd i likning (2.6) divideres så med strekkrafta S

$$\begin{aligned} \frac{S_2 \sin\Theta_2}{S_2 \cos\Theta_2} - \frac{S_1 \sin\Theta_1}{S_1 \cos\Theta_1} &= \frac{m\ddot{y}}{S} \\ \Rightarrow \tan\Theta_2 - \tan\Theta_1 &= \frac{m\ddot{y}}{S}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vi ser av figuren at $\tan\Theta = \partial y/\partial x$. Dette, samt $m = \mu\Delta x$, innsatt i likning (2.7) gir

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x} = \frac{\mu\Delta x}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{2.8}$$

Likning (2.8) divideres nå med Δx. Dersom vi lar $\Delta x \to 0$, gjenkjenner vi venstre side i likning (2.9) som definisjonen av den deriverte:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.9}$$

Innsatt i likning (2.8) gir dette

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{2.10}$$

Denne likninga kalles *bølgelikninga*. Tidligere i dette avsnittet så vi på $y = f(x - vt)$. Vi setter nå $u = x - vt$ og deriverer med hensyn på x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_u \frac{\partial u}{\partial x} = f'_u\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_u \frac{\partial u}{\partial x} = f''_u \tag{2.11}$$

Tilsvarende deriverer vi med hensyn på t:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'_u \frac{\partial u}{\partial t} = -v f''_u\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v f''_u \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 f''_u \tag{2.12}$$

Om funksjonen f erstattes med utslaget y, og vi eliminerer f''_u fra likningene (2.11) og (2.12), får vi

Bølgelikninga
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

Denne likninga holder generelt for endimensjonale, transversale bølger som brer seg i x-retning uten energitap. Hastigheten v er bølgens fasehastighet. Det er lett å se av bølgelikninga at denne også holder for en bølge som forplanter seg i negativ x-retning, $y = g(x + vt)$. En sammenlikning av likning (2.10) og bølgelikninga viser at en bølge på den oppspente strengen vil ha en fasehastighet

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}. \tag{2.14}$$

En harmonisk bølge $y(x,t) = \sin(kx - \omega t)$ vil også oppfylle bølgelikninga. Her betegner k ***bølgetallet***, definert som

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.15}$$

Dersom vi deriverer $y(x,t)$ to ganger med hensyn på hhv. x og t, får vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k^2 y(x,t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 y(x,t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sammenlikner vi dette med bølgelikninga, ser vi at denne er oppfylt dersom

$$v = \frac{\omega}{k}. \tag{2.17}$$

Altså angir likning (2.17) fasehastigheten for en harmonisk bølge.

Fordi bølgelikninga er en homogen og lineær differensiallikning, vil også summen av to løsninger være en løsning, f.eks. $y = f(x - vt) + g(x - vt)$. Dette kan være av interesse når vi har flere bølgekilder i et medium, og superposisjonsprinsippet gjelder.

2.3 Energi transportert med bølge

Vi har tidligere slått fast at et av de viktigste kjennetegnene ved bølger er at de transporterer energi. Det er på tide å finne ut hvor mye energi som transporteres med bølgen. Gjennom hele dette delkapittelet skal vi se på transversale bølger på en streng, men resultatene overføres lett til longitudinale bølger. Overraskende nok er enkelte av dem eksakte også for elektromagnetiske bølger!

Energitetthet i bølge

Vi skal se på energien i et strengelement som når strengen er i ro har lengde dx og masse per lengdeenhet μ. Strengen er strukket med strekkrafta S. Som i avsnitt 2.2 antar vi at den *horisontale* strekkrafta S_x overalt er lik S. Strengen har både kinetisk og potensiell energi, og vi skal finne disse hver for seg.

Den kinetiske energien skyldes at massen strengen er laget av er i bevegelse. Hastigheten til denne bevegelsen er partikkelhastigheten. For strengelementet dx er da den kinetiske energien

$$dE_k = \frac{1}{2} v_p^2 dm,$$

der dm er massen av strengelementet. For konstant massetetthet har vi $dm = \mu dx$. Partikkelhastigheten er i avsnitt 2.1 gitt som $v_p = \partial y / \partial t$. Vi setter inn i likninga over og får

$$\frac{dE_k}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2, \tag{2.18}$$

som er tettheten av kinetisk energi.

I figur 2.4 ser vi strengen når den er i ro og etter at den har fått et utslag. Vi ser at strengen blir lengre når den får et utslag. For å strekke strengen slik at den blir lengre, må strekkrafta S gjøre et arbeid mot elastisiteten i strengen: Den potensielle energien skyldes forlengningen av strengen. Den enkleste måten å finne den potensielle energien på, er å finne arbeidet som er gjort for å forlenge strengen – arbeidet og den potensielle energien er den samme.

Figur 2.4

Som i avsnitt 2.2, skal vi anta at utslaget y er lite. Da blir også forlengelsen av strengen liten. Lengden av strengen i figur 2.4(b) er

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Vi har allerede antatt at utslaget er lite; det tilsvarer $dy/dx \ll 1$. Under denne antagelsen kan vi rekkeutvikle rottegnet til første orden[1]. Da forenkler

[1] $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ for $\alpha \ll 1$. Se rekkeutviklinger i Rottmann.

utslaget seg til

$$dl = dx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Arbeidet som gjøres for å strekke strengen fra lengden dx til lengden dl er

$$dW = \int_{dx}^{dl} S dx.$$

Strekkrafta i strengen øker litt etter hvert som strengen blir lengre. En mulig vei videre hadde vært å bruke Hookes lov på strengen, men her skal vi tilnærme og si at strekkrafta S er konstant. Dette vil være en god tilnærmelse, da forlengelsen av strengen er så liten at strekkrafta uansett ikke vil endres mye. Med konstant S er integralet for arbeidet trivielt,

$$dW = S(dl - dx) = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx,$$

så vi kan slå fast at tettheten av potensiell energi er

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \tag{2.19}$$

Den totale energitettheten ε finner vi ved å summere likning (2.18) og (2.19) (vi bruker $v^2 \equiv S/\mu$ til forenkling):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{2.20}$$

Vi skal se på et vanlig spesialtilfelle, nemlig energitettheten for en harmonisk bølge

$$y(x,t) = y_0 \cos\left(kx - \omega t\right). \tag{2.21}$$

Når vi kjenner formen på utslaget kan vi regne ut de partiellderiverte som inngår i likning (2.20):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_0\omega \sin\left(kx - \omega t\right)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -y_0 k \sin\left(kx - \omega t\right)$$

Vi setter disse inn i (2.20) og får

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu y_0^2\left[\omega^2 + v^2k^2\right]\sin^2(kx - \omega t) = \mu\omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t). \tag{2.22}$$

Dette er den instantane energitettheten. Vanligvis er vi mer interessert i middelverdien av energitettheten, siden den vanligvis varierer raskt. Vi kan velge å ta middelverdien over en bølgelengde,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon\, dx,$$

eller over en periode,

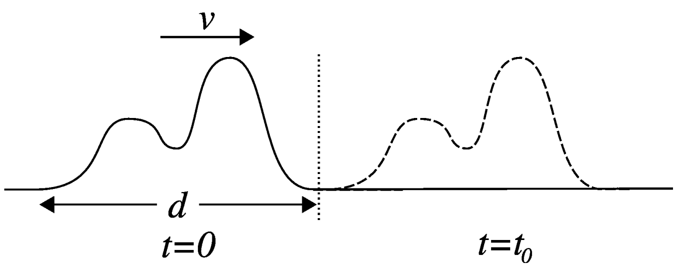
$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon \, dx.$$

Når vi har en harmonisk vandrebølge blir svaret i begge tilfeller det samme – vi midler $\sin^2(kx - \omega t)$ over en periode og får $\frac{1}{2}$, slik at midlere energitetthet blir

$$\overline{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2. \tag{2.23}$$

Energitransport med bølge

Vi kan nå finne ut hvor mye energi en bølge inneholder, men vi vet ikke hvor raskt denne energien forplanter seg. For å finne ut av dette, utfører vi et tankeeksperiment:



Figur 2.5

Vi ser på bølgepulsen i figur 2.5. Den har bredde d og forplanter seg med fasehastighet v. Det er opplagt at energitettheten utenfor bølgepulsens bredde må være null, siden strengen der har null utslag og null partikkelhastighet. Spørsmålet vi må svare på, er hvor lang tid det tar for hele bølgetoget å krysse en tenkt grenseflate – vi må finne tiden t_0. På tiden t_0 vil bølgen ha flyttet en energi εd gjennom grenseflata, og effekten vil være[2]

$$P = \frac{\varepsilon d}{t_0}.$$

Med hastighet v er tiden bølgetoget trenger på å flytte seg gjennom grenseflata $t_0 = d/v$, så midlere effekt (energi transportert per sekund) blir

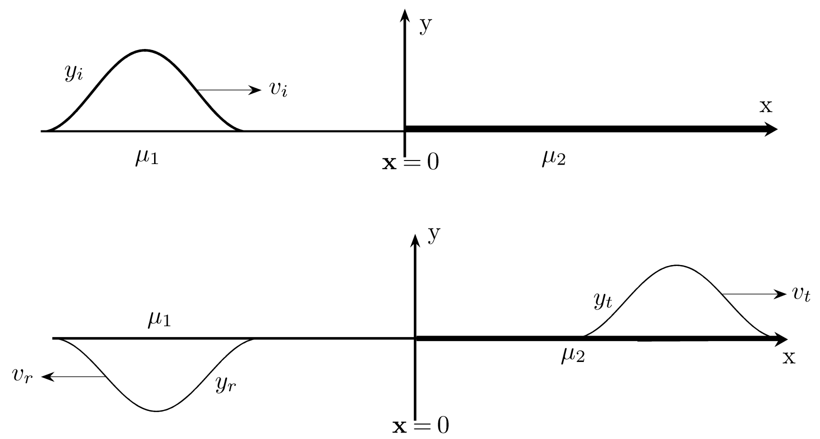
$$\langle P \rangle = v\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 y_0^2. \tag{2.24}$$

2.4 Refleksjon, transmisjon og stående bølger på streng

Figur 2.6 viser to lange strenger med massetettheter μ_1 og μ_2, som er skjøtt sammen i $x = 0$. En strekkraft S virker likt på de to strengene. Vi ser nå

[2]For bølger i dispersive medier blir dette mer komplisert, men det skal vi ikke studere nærmere.

på en transversal bølgepuls som kommer inn fra venstre. Når pulsen når skjøtepunktet, vil den delvis reflekteres og delvis transmitteres.



Figur 2.6

For å kunne regne på denne situasjonen antar vi at bølgene på strengen ikke består av vilkårlige pulser, men i stedet er harmoniske bølger. Vi antar at den innfallende bølgen er gitt ved

$$y_i(x,t) = y_{i0} \sin\left(k_i x - \omega_i t + \phi_i\right) , \qquad x \leq 0. \tag{2.25}$$

Denne vil ha en fasehastighet

$$v_i = \frac{\omega_i}{k_i} = \sqrt{\frac{S}{\mu_1}}. \tag{2.26}$$

Den transmitterte bølgen som brer seg til høyre for $x = 0$ kan beskrives ved

$$y_t(x,t) = y_{t0} \sin\left(k_t x - \omega_t t + \phi_t\right) , \qquad x \geq 0 \tag{2.27}$$

og vil ha en fasehastighet

$$v_t = \frac{\omega_t}{k_t} = \sqrt{\frac{S}{\mu_2}}. \tag{2.28}$$

Reflektert bølge, som vil ha samme fasehastighet som den innfallende bølgen (gitt samme strekkraft S og massetetthet μ_1 på strengen), vil ha formen

$$y_r(x,t) = y_{r0} \sin\left(k_r x + \omega_r t + \phi_r\right) , \qquad x \leq 0. \tag{2.29}$$

Det totale utslaget på strengen som funksjon av tid og posisjon vil nå være gitt som

$$y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & , \quad x \leq 0 \\ y_t(x,t) & , \quad x \geq 0 \end{cases}. \tag{2.30}$$

En rekke fysiske betingelser kan settes opp for dette systemet:

- Både $y(x,t)$ og $\partial y/\partial t$ må være kontinuerlige i $x = 0$. Noen annet vil føre til brudd på strengen.
- $\partial y/\partial x$ må være kontinuerlig i $x = 0$. Ellers følger det av likningene (2.9) og (2.10) at strengens akselerasjon $\partial^2 y/\partial x^2$ vil gå mot uendelig i $x = 0$.
- $\overline{P_i} = \overline{P_t} + \overline{P_r}$. Her betegner $\overline{P}$ midlere effekt, og indeksene angir om det er snakk om innkommende, reflektert eller transmittert bølge. Dette følger av loven om energibevarelse.

Alle disse betingelsene må være oppfylt for systemet til *enhver tid*. Dette vil kun være mulig dersom[3]

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \tag{2.31}$$

og

$$\phi_i = \phi_r = \phi_t \tag{2.32}$$

Vi velger $\phi_i = 0$ og setter $\omega_i = \omega$. Av kontinuitetskravet til y i skjøtepunktet følger det nå at

$$\begin{aligned} y_{i0} \sin(-\omega t) + y_{r0} \sin \omega t &= y_{t0} \sin(-\omega t) \\ \Rightarrow y_{i0} - y_{r0} &= y_{t0}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Likeledes følger det av kontinuitetskravet til $\partial y/\partial x$ i skjøtepunktet at

$$\begin{aligned} k_i y_{i0} \cos(-\omega t) + k_r y_{r0} \cos \omega t &= k_t y_{t0} \cos(-\omega t) \\ \Rightarrow k_i y_{i0} + k_r y_{r0} &= k_t y_{t0}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Her vil nødvendigvis $k_i = k_r$. Av likningene (2.33) og (2.34) kan vi nå uttrykke amplitudene til reflektert og transmittert bølge ved amplituden til innfallende bølge:

$$y_{r0} = \frac{k_t - k_i}{k_t + k_i} y_{i0} \ , \quad y_{t0} = \frac{2k_i}{k_t + k_i} y_{i0} \tag{2.35}$$

Ved å bruke at $k_i = \omega/v_1$ og $k_t = \omega/v_2$ kan vi nå uttrykke amplitudene ved enten fasehastighetene v_1 og v_2 eller strengenes massetettheter μ_1 og μ_2:

$$y_{r0} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} y_{i0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0} \tag{2.36}$$

[3] Både innfallende, reflektert og transmittert bølge er funksjoner av ωt, så skal vi bli kvitt tidsavhengigheten (slik som i likning (2.33)), må ω være lik for alle bølgene.

$$y_{t0} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0} \tag{2.37}$$

Vi kan nå skille mellom, og se nærmere på følgende fem tilfeller:

1. $\mu_1 = \mu_2$. Dette medfører at $y_{r0} = 0$ og $y_{t0} = y_{i0}$. Altså har vi ingen refleksjon av den innkommende bølgen i dette tilfellet.

2. $\mu_1 < \mu_2$. Dette gir at $y_{r0}/y_{i0} > 0$, som igjen medfører at reflektert bølge $y_r(0,t) = y_{r0} \sin \omega t$ har motsatt fase av innkommende bølge $y_i(0,t) = -y_{i0} \sin \omega t$.

3. $\mu_1 > \mu_2$. Dette gir at $y_{r0}/y_{i0} < 0$, som medfører at reflektert bølge $y_r(0,t)$ er *i fase* med innkommende bølge $y_i(0,t)$.

4. $\mu_2 \to \infty$. Dette innebærer at $y_{r0} \to y_{i0}$ og $y_{t0} \to 0$, altså en total refleksjon av innkommende bølge. Dette skjer f.eks. dersom strengen er festet til en vegg.

5. $\mu_2 \to 0$. Dette fører til at $y_r(0,t) = y_i(0,t)$, altså at den reflekterte bølgen returneres fra den fri enden i samme fase og med samme amplitude som innkommende bølge. I praksis kan denne situasjonen være vanskelig å arrangere.

Punktene 1 og 4 over virker intuitivt rimelige. Punktene 2 og 3 viser et ikke fullt så intuitivt, men vikig resultat: Når en innkommende bølge reflekteres mot et tettere medium, skifter bølgen fase 180°.

Refleksjons- og transmisjonskoeffisient

Når vi ser på refleksjon og transmisjon av bølger, kan det være av interesse hvor mye av energien transportert med bølgen som hhv. reflekteres og transmitteres. I denne sammenheng introduseres begrepene refleksjonskoeffisient, R, og transmisjonskoeffisient, T:

$$R = \frac{\overline{P_r}}{\overline{P_i}}, \qquad T = \frac{\overline{P_t}}{\overline{P_i}} \tag{2.38}$$

Ved innsetting av midlere effekt fra likning (2.24) og bruk av forholdet mellom amplituder fra likningene (2.36) og (2.37) har vi at

$$R = \frac{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{r0}^2}{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{i0}^2} = \frac{y_{r0}^2}{y_{i0}^2} = \frac{\left(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}\right)^2}{\left(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}\right)^2}, \tag{2.39}$$

$$T = \frac{\frac{1}{2} v_2 \mu_2 \omega^2 y_{t0}^2}{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{i0}^2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cdot \frac{4\mu_1}{\left(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}\right)^2} = \frac{4\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\left(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}\right)^2}. \tag{2.40}$$

Verdt å merke seg er at

$$R+T=\frac{\overline{P_r}}{\overline{P_i}}+\frac{\overline{P_t}}{\overline{P_i}}=\frac{4\sqrt{\mu_1\mu_2}+\mu_2-2\sqrt{\mu_1\mu_2}+\mu_1}{\mu_2+2\sqrt{\mu_1\mu_2}+\mu_1}=1. \tag{2.41}$$

Dette betyr at $\overline{P_i}=\overline{P_r}+\overline{P_t}$, hvilket stemmer overens med kravet om energibevarelse nevnt tidligere.

Stående bølger

Vi ser nå nærmere på tilfellet hvor vi har en streng festet i en vegg (tilsv. $\mu_2 \to \infty$). Gitt en innkommende bølge $y_i(x,t) = y_{i0}\sin(kx-\omega t)$ og at veggen representerer $x=0$, vet vi da at $y_r(x,t) = y_{i0}\sin(kx+\omega t)$. Fra likning (2.30) har vi nå

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= y_i(x,t)+y_r(x,t)\\
&= y_{i0}\left[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)\right]\\
&= y_{i0}\left[\sin kx\cos\omega t-\cos kx\sin\omega t+\sin kx\cos\omega t+\cos kx\sin\omega t\right]\\
&= 2y_{i0}\sin kx\cos\omega t.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dette er en harmonisk svingning ($\cos\omega t$) med en x-avhengig amplitude ($2y_{i0}\sin kx$). En slik bølge flytter seg ikke *langs* strengen, da x og t ikke opptrer i kombinasjonen $x \pm vt$. I stedet vil hvert enkelt punkt på strengen ha en transversal harmonisk svingning. Noen punkter på strengen er i ro for alle t ($\sin kx = 0$). Disse kalles knutepunkter eller noder. Andre punkter har maksimal svingningsamplitude ($\sin kx = \pm 1$). Disse kalles buker eller antinoder. Per definisjon kalles dette en *stående bølge*.

Dersom vi lar likning (2.42) beskrive bølgen på en streng med lengde L festet i begge ender, og vi lar $x=0$ og $x=L$ betegne festepunktene, får vi to randkrav å ta hensyn til:

$$y(0,t)=y(L,t)=0 \tag{2.43}$$

Sistnevnte av disse to gir likninga

$$y=2y_{i0}\sin kL\cos\omega t=0 \tag{2.44}$$

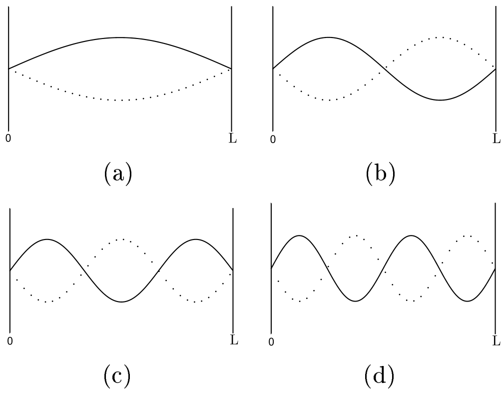
som leder til betingelsen

$$kL=n\pi\ , \qquad n=1,2,3\ldots. \tag{2.45}$$

Mulige bølgelengder, og tilhørende frekvenser, for stående bølger på strengen vil følgelig være

$$\lambda_n=\frac{2\pi}{k_n}=\frac{2L}{n}\ , \qquad f_n=\frac{1}{T_n}=\frac{v}{\lambda_n}=\frac{n}{2L}v\ , \qquad n=1,2,3\ldots \tag{2.46}$$

Figur 2.7 viser de fire første stående harmoniske bølger på en streng som er festet i begge ender. For $n=1$ har vi $\lambda=2L$. Denne svingningen kalles *grunntonen* eller *første harmoniske*. Svingningen som svarer til $n=2$, med $\lambda=L$, kalles *første overtone* eller *andre harmoniske*, osv.



Figur 2.7: Stående harmoniske bølger på streng. (a) viser grunntonen, $n = 1$, (b) viser første harmoniske, $n = 2$, (c) viser andre harmoniske, $n = 3$ og (d) viser tredje harmoniske, $n = 4$.

2.5 Flerdimensjonale bølger

Hittil har vi kun sett på bølger i en dimensjon, dvs. bølger som forplanter seg i en romlig retning. I naturen finner vi i all hovedsak bølger som forplanter seg i flere retninger. I den sammenheng er det fornuftig å introdusere et par nye begreper:

- En flate hvor fasen til en bølge er konstant, kalles en *bølgefront*.
- En bølge med plane bølgefronter, kalles en *planbølge*.

Uttrykket $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$ beskriver en harmonisk bølge som forplanter seg i x-retning. Denne vil ha bølgefronter vinkelrett på x-aksen, og er følgelig en planbølge. Vi kan generalisere uttrykket over til å beskrive en planbølge som forplanter seg i en vilkårlig romlig retning:

$$\xi(\mathbf{r},t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \tag{2.47}$$

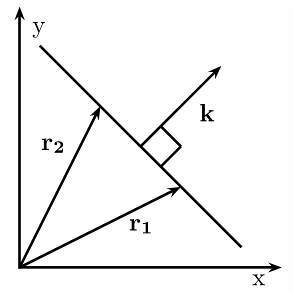
Her er $\mathbf{k} = k \cdot \hat{\mathbf{k}}$ bølgetallsvektoren, og $\hat{\mathbf{k}}$ angir bølgens forplantningsretning. Sistnevnte er kanskje ikke gitt intuitivt, men sees fra figur 2.8.

Figur 2.8 viser en bølgefront ved en gitt tid t, og to vektorer $\mathbf{r_1}$ og $\mathbf{r_2}$ til to forskjellige punkter i bølgefronten. Da posisjonene $\mathbf{r_1}$ og $\mathbf{r_2}$ ligger i samme bølgefront, har vi at

$$\xi(\mathbf{r_1},t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r_1} - \omega t) = \xi(\mathbf{r_2},t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r_2} - \omega t).$$

Det følger fra dette at

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r_1} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{r_2} \\ \Rightarrow \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

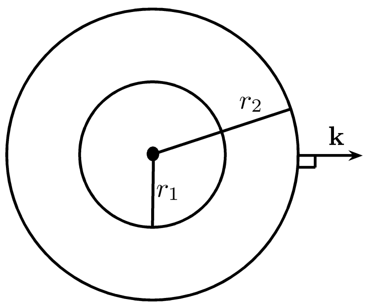


Figur 2.8

Vektoren $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ vil nødvendigvis være parallell med bølgefronten. Bølgefronten står vinkelrett på bølgens forplantningsretning. Vi vet at $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = 0$ medfører at $(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \perp \mathbf{k}$. Altså må bølgevektoren $\mathbf{k}$ peke i bølgens forplantningsretning.

Sfæriske bølger

En type bølger som forplanter seg i flere retninger og som forekommer hyppig i naturen, er sfæriske bølger (eller kulebølger). Sfæriske bølger har kuleformede bølgefronter, og er altså ikke planbølger.



Figur 2.9: Bølgefronter rundt en bølgekilde som sender ut sfæriske bølger.

Figur 2.9 viser to bølgefronter for hhv. r_1 og r_2. Fra figuren kan vi utlede et par interessante sammenhenger for sfæriske bølger. Fra kravet om energibevarelse har vi at

$$
\begin{aligned}
P_1 = 4\pi r_1^2 I_1 &= P_2 = 4\pi r_2^2 I_2 \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= \frac{r_1^2}{r_2^2} \\
\Rightarrow I &\sim \frac{1}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Altså har vi for kulebølger at intensiteten avtar som en over kvadratet av avstanden r fra bølgekilden. Om vi kombinerer dette med resultatet fra kapittel 2.3, $I \sim \xi^2$, får vi at følgende relasjon gjelder for amplituden til sfæriske bølger:

$$\xi \sim \frac{1}{r} \tag{2.50}$$

2.6 Dispersjon og gruppehastighet

Frem til nå har vi kun sett på harmoniske bølger i form av enkle sinus- eller cosinusfunksjoner. For de fleste bølgefenomener er dette en sterk overforenkling. De fleste bølgekilder sender ut bølger som må beskrives ved en kombinasjon av flere harmoniske bølger. I slike tilfeller kalles gjerne totalbølgen et bølgetog.

For harmoniske bølger er fasehastigheten gitt ved $v = \omega/k$, som er konstant for en bølge med gitt frekvens og bølgelengde. Dersom samtlige harmoniske bølger som utgjør bølgetoget har samme hastighet, beholder totalbølgen sin opprinnelige form mens den forplanter seg. Dette er imidlertid ikke alltid tilfellet. Fenomenet hvor et bølgetog endrer form etter hvert som det skrider frem, kalles *dispersjon*.

Når en bølge er dispersiv, skyldes dette at de ulike harmoniske bølgene som utgjør bølgetoget har forskjellig fasehastighet. Fasehastigheten er avhengig av bølgetallet k, og vi kan skrive vinkelfrekvensen ω som

$$\omega(k) = v(k)k. \tag{2.51}$$

Gruppehastighet v_g kan oppfattes som den hastigheten toppen av et bølgetog brer seg med, og er definert som

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{2.52}$$

Vi ser av likning (2.51) og (2.52) at i tilfellet hvor vi ikke har dispersjon og fasehastigheten v er konstant, vil gruppehastighet være lik fasehastighet, $v_g = v$. Om vi derimot har dispersjon, vil ikke sammenhengen mellom ω og k være lineær, og $v_g \neq v$.

De fleste reelle medier er dispersive. Dette innebærer at de forskjellige komponentene et bølgetog er bygd opp av forplanter seg i mediet med forskjellige hastigheter. Dispersjon av lys i vann er årsaken til regnbuen. Det samme gjelder lysbrytning i et glassprisme. Overflatebølger på vann er også dispersive.

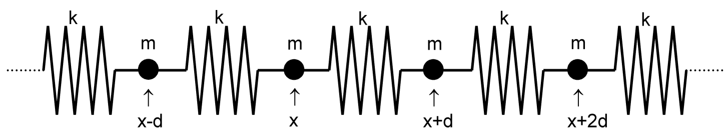
Noen medier er imidlertid ikke-dispersive. Lydbølger i luft er et eksempel på dette. Dersom lydbølger i luft var dispersive, ville vanlig konversasjon blitt umulig, da lyden ville blitt forvrengt på veien mellom taler og lytter. Elektromagnetiske bølger i vakuum er et annet eksempel på ikke-dispersive bølger. Dette kommer vi tilbake til senere.

3 Lyd - longitudinale mekaniske bølger

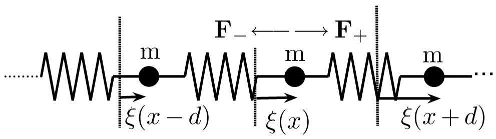
3.1 Longitudinal bølge

En longitudinal bølge er en bølge hvor partiklenes utsving fra likevektstilstand i mediet er langs bølgens forplantningsretning. Lydbølger er eksempler på longitudinale trykkbølger. En god makroskopisk modell for hvordan en longitudinal bølge forplanter seg i et medium er en masse/fjær-transmisjonslinje. Denne modellen kan brukes til å utlede bølgelikninga for longitudinale, mekaniske bølger.

Masse/fjær-transmisjonslinjen



(a)



(b)

Figur 3.1: Masse/fjær-transmisjonslinje, i likevekt (figur a) og skjøvet ut av likevekt (figur b).

I figur 3.1 betegner $\xi(x)$ utsvinget av massen med likevektsposisjon x. Likeledes betegner $\xi(x \pm d)$ utsvinget av massene med likevektsposisjon $x \pm d$. Vi ser at netto kraft på massen ved posisjon x er

$$F = F_+ - F_- = k[\xi(x+d) - \xi(x)] - k[\xi(x) - \xi(x-d)], \tag{3.1}$$

hvor F_+ er strekk-krafta fra fjæra til høyre for massen m, og F_- er strekk-krafta fra fjæra til venstre for m. Massens akselerasjon vet vi vil være den annenderiverte av posisjonen $x + \xi(x,t)$. Dette gir

$$a = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[x + \xi(x,t)] = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3.2}$$

Insatt i Newtons 2. lov gir likning (3.1) og (3.2) nå

$$m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = k[\xi(x+d,t) + \xi(x-d,t) - 2\xi(x,t)]. \tag{3.3}$$

Denne likninga kan løses eksakt. Antar vi imidlertid at $d << \lambda$, slik at $\xi(x \pm d, t)$ ikke er mye forskjellig fra $\xi(x,t)$, kan $\xi(x \pm d, t)$ taylorutvikles til andre orden:

$$\xi(x \pm d, t) \approx \xi(x,t) \pm d\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

Innsatt i likning (3.3) gir denne rekkeutviklingen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kd^2}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{3.5}$$

Dette kjenner vi igjen som bølgelikninga for utsvinget $\xi(x,t)$ fra likevekt, med bølgehastighet

$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}. \tag{3.6}$$

Elastisk modul

Størrelsen k i likning (3.6) vil være avhengig av lengden L på fjæra i masse/fjær-systemet. En lengre fjær vil nødvendigvis bli strukket lengre enn en kortere fjær blir strukket av samme kraft. Størrelsen $K = k \cdot L$ vil imidlertid være uavhengig av fjærlengden. K kalles elastisk modul, har enhet N og er karakteristisk for fjærtypen (dvs er bestemt av materialet og form på fjæra). Innfører vi også massetetthet $\mu = m/L$ (massen per lengdeenhet), kan vi skrive om likning (3.6), og vi får et nytt uttrykk for bølgehastigheten v:

$$v = \sqrt{\frac{kL}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}} \tag{3.7}$$

Her har vi satt inn fjærlengden L for d i likning (3.6). Dette resultatet er utledet for en masse/fjær-transmisjonslinje, men holder også generelt. Likning (3.7) angir bølgehastigheten for longitudinale, mekaniske bølger som forplanter seg i et medium.

3.2 Impuls transportert med bølge

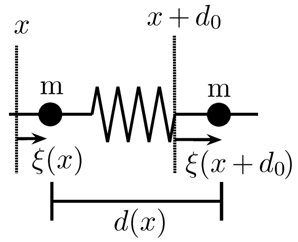
Bølger har impuls. I avsnitt 2.3 fant vi energitettheten til en transversal bølge på streng (likning 2.20). Denne formelen gjelder også for longitudinale bølger på masse/fjær-transmisjonslinjen, men det skal vi ikke vise her. Vi skal i stedet finne sammenhengen mellom energitetthet og impulstetthet for masse/fjær-transmisjonslinjen (som er tegnet i figur 3.2). Sammenhengen vi finner gjelder for flere andre typer bølger, inkludert elektromagnetiske bølger.

Impulsen til en punktmasse er $p = mv$. For en kontinuerlig massefordeling blir den tilsvarende formelen for *impulstetthet*[1]

$$\pi = \mu' v, \tag{3.8}$$

[1] Her er altså π symbol for den fysiske størrelsen *impulstetthet*, og ikke den matematiske konstanten 3.14...

der μ' er massetettheten. Vi skal se at μ' *varierer* med utslaget $\xi(x,t)$ (vi bruker μ' for den variende massetettheten og μ for massetettheten når systemet er i ro). Når vi skal regne ut impulstettheten for masse/fjær-transmisjonslinjen, har vi to utfordringer: Bestemme $\mu'(x)$ over alt på transmisjonslinjen (litt vanskelig) og bestemme $v(x)$ over alt (mye enklere).



Figur 3.2

Vi starter med å bestemme massetettheten. Ved likevekt er avstanden mellom hver masse d_0, så massetettheten er

$$\mu = \frac{m}{d_0}.$$

Når bølgen forplanter seg, vil avstanden mellom massene endre seg. I figur 3.2 ser vi at avstanden mellom massene er

$$d(x) = d_0 + \xi(x+d_0) - \xi(x).$$

For de systemene vi er interessert i (gasser, væsker og så videre), er $d \ll \lambda$. Da kan vi rekkeutvikle $\xi(x+d_0)$ til første orden (og se bort fra høyere ordens ledd). Avstanden blir da

$$d(x) \approx d_0 + \xi(x) + d_0\frac{\partial \xi}{\partial x} - \xi(x) = d_0\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Massen må være bevart på transmisjonslinjen selv om bølgen brer seg. I figur 3.2 ser vi at det er en masse m i hver ende av lengden d. Halvparten av hver av disse massene kan sies å "høre til" på lengden d (den andre halvparten hører til på lengden på motsatt side av massen), slik at massen på d blir m. Massetettheten blir da

$$\mu'(x) = \frac{m}{d(x)} = \frac{m}{d_0\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)},$$

som med rekkeutviling av nevneren til 1. orden blir

$$\mu'(x) \approx \mu\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right). \tag{3.9}$$

$v(x)$ er hastigheten til massene på transmisjonslinjen. Den er rett og slett hvor fort utslaget $\xi(x)$ endrer seg med tida i en gitt posisjon. Vi har

$$v(x) = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Vi har nå bestemt begge størrelsene som inngår i uttrykket for impulstetthet i likning (3.8). Vi setter inn for μ og v fra henholdsvis likning (3.9) og (3.10) og får det generelle uttrykket for impulstettheten til en bølge:

$$\mu' = \mu \frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \tag{3.11}$$

Et interessant spesialtilfelle er midlere impulstetthet til en harmonisk bølge

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos{(kx - \omega t)}. \tag{3.12}$$

Om vi beregner de partiellderiverte og setter inn i likning 3.11 får vi

$$\pi = -\mu\omega\xi_0 \cos{(kx-\omega t)} + \mu\omega k \xi_0^2 \cos^2{(kx - \omega t)}.$$

Dette resultatet er ikke så spennende, men tidsmidling gir et interessant resultat. Middelverdien av $\cos{(kx-\omega t)}$ er null over en hel periode, så det første leddet faller bort. I det siste leddet er middelverdien av $\langle \cos^2{(kx-\omega t)} \rangle = 1/2$ og $k = \omega/v$, så vi får

$$\langle \pi \rangle = \frac{1}{2}\frac{\mu\omega^2\xi_0^2}{v}. \tag{3.13}$$

Sammenlikner vi dette med uttrykket for energitetthet i harmonisk bølge i likning (2.23), ser vi den overraskende sammenhengen

$$\langle \pi \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{v}. \tag{3.14}$$

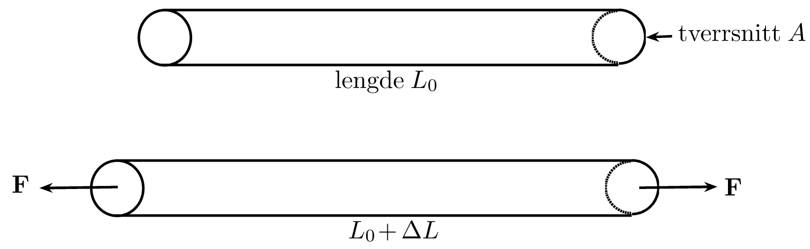
Dette resultatet holder generelt (også for elektromagnetiske bølger): Midlere impulstetthet er midlere energitetthet delt på fasehastigheten.

3.3 Lydbølger i ulike medier

Vi går nå fra å betrakte masse/fjær-transmisjonslinjen til å se på lydbølger i faktiske medier. Dette medfører at uttrykket for bølgehastighet må modifiseres, på ulikt vis avhengig av om bølgen forplanter seg i fast stoff, væske eller gass.

Lydbølger i tynn stang

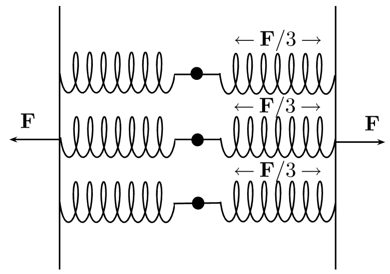
En tynn stang med lengde L_0 blir strukket til en ny lengde $L_0 + \Delta L$ av en kraft F. Hookes lov gir at $F = k \cdot \Delta L$, der k er fjærkonstanten. Som for fjærer, nevnt i avsnitt 3.1, vil k være avhengig av lengden L av stanga. Vi



Figur 3.3: Tynn stang strekkes en lengde ΔL av en kraft F

setter derfor heller inn elastisk modul $K = k \cdot L_0$ i Hookes lov. Dette gir $F = K \cdot (\Delta L / L_0)$, hvor K er uavhengig av L_0.

Et nytt moment som må tas hensyn til når vi nå ikke lenger snakker om en enkel masse/fjær-transmisjonslinje, men et medium, er at stangas tverrsnittsareal er av betydning. Et større tverrsnitt medfører nødvendigvis større fjærkonstant k og elastisk modul K. For en stang med en gitt lengde L_0 som det utøves en gitt kraft F på, vil forlengelsen $\Delta L = (F L_0)/K$ avta proporsjonalt med antall fjærer tverrsnittet kan sies å svare til (jfr figur 3.4).



Figur 3.4: Tverrsnittet er avgjørende for forlengelsen av en tynn stang. Svarer tverrsnittet til tre fjærer, vil stanga strekkes 1/3 av hva en stang tilsvarende èn fjær vil strekkes av samme kraft.

Elastisk modul og tverrsnitt er proporsjonale størrelser. Vi innfører derfor en ny elastisk modul, såkalt *Youngs modul*

$$Y = \frac{K}{A}. \tag{3.15}$$

Youngs modul er uavhengig av både stangas lengde L_0 og tverrsnitt A. Det er følgelig en materialkonstant. Om vi nå benytter likning (3.7) har vi at lydhastigheten for lydbølger i en tynn stang er gitt som

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \tag{3.16}$$

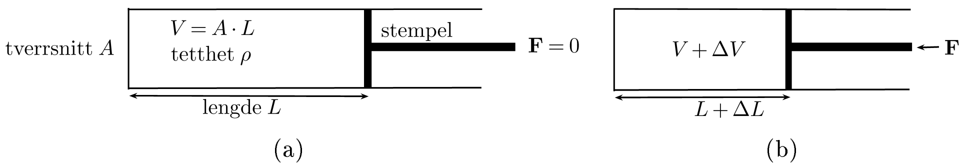
Her betegner ρ masse per volumenhet for stanga. Det er også verdt å merke seg at innføringen av Youngs modul gir at

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L_0}$$
$$\Rightarrow \text{ mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \cdot \text{relativ tøyning.} \tag{3.17}$$

Dette resultatet gjelder generelt for lineær respons i elastiske medier.

Lydbølger i væsker

Når vi nå skal se på lydbølger som forplanter seg i væske, betrakter vi et væskerør med et stempel i en ende.



Figur 3.5: Væskerør med bevegelig stempel i en ende. Figur a) viser væsken i likevekt. Figur b) viser væsken skjøvet ut av likevekt. ΔV og ΔL er negative størrelser.

En kraft utøves på stempelet slik at væsken presses litt sammen og røret forkortes en lengde ΔL. Dette medfører en endring i væskevolumet $\Delta V = A \cdot \Delta L$. Da likning (3.17) gjelder også her, har vi at

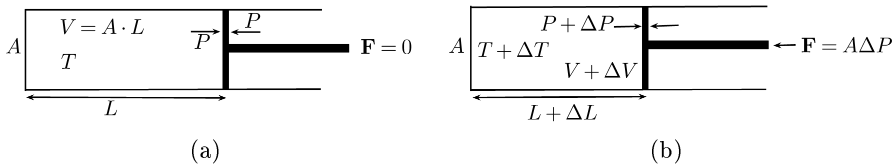
$$\frac{F}{A} = -B \cdot \frac{\Delta L}{L} = -B \cdot \frac{\Delta V}{V}. \tag{3.18}$$

Her betegner B *bulkmodulen* (enhet $\mathrm{N/m^2}$), en materialkonstant for væsken, tilsvarende Youngs modul for en tynn stang. Likning (3.7) gjelder også her, som medfører at hastigheten av lydbølger som forplanter seg i væske er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{3.19}$$

Lydbølger i gasser

Også når vi ser på lydbølger i gasser, tar vi for oss et rør fylt med den aktuelle gassen, med et stempel i en ende. Vi velger her å se på det forenklede tilfellet hvor gassen antas å være en ideell gass. Nok en gang utøves en kraft F på stempelet slik at gassen komprimeres , og en trykkendring ΔP forplanter seg som en bølge i mediet. Vi antar at gassen var i likevekt før komprimeringen, slik at $F = A \cdot \Delta P$, hvor A betegner tverrsnittet til røret.



Figur 3.6: Ideell gass i rør med bevegelig stempel i en ende. Figur (a) viser gassen i likevekt. Figur (b) viser gassen skjøvet ut av likevekt. ΔV og ΔL er negative størrelser.

For å finne et uttrykk for lydhastigheten i ideell gass nevnes noen viktige resultater fra termodynamikken. For en ideell gass har vi at

$$PV = Nk_bT. \tag{3.20}$$

Her betegner N antallet gassmolekyler, T temperaturen i gassen og $k_B = 1.3806505(24) \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant. Videre har vi for adiabatiske prosesser (prosesser uten varmeutveksling med omgivelsene) at

$$PV^\gamma = konstant. \tag{3.21}$$

Her betegner γ forholdet mellom gassens varmekapasiteter ved hhv konstant trykk og volum, $\gamma = C_p/C_v$. Denne har verdien 5/3 for enatomige gasser og verdien 7/5 for toatomige gasser. Vi tar nå differesialet på begge sider av likning (3.21), og husker at differensialet av en konstant er null. Dette gir

$$\begin{aligned} \Delta(PV^\gamma) &= \Delta P \cdot V^\gamma + P \cdot \gamma V^{\gamma-1}\Delta V = 0 \\ \Rightarrow \Delta P &= -\gamma P \frac{\Delta V}{V}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ved å sammenlikne likningene (3.22) og (3.18), ser vi at vi har følgende to resultater for lydbølger som forplanter seg i gasser:

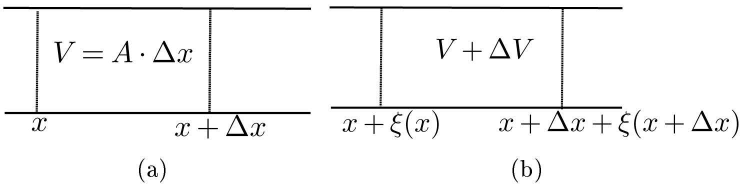
$$B = \gamma P \tag{3.23}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{3.24}$$

Om vi nå i tillegg substituerer $P = Nk_bT/V$ og $\rho = Nm/V$, hvor m betegner midlere molekylmasse, i likning (3.24), får vi at lydhastigheten i gasser er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_b T}{m}}. \tag{3.25}$$

Som for en lydbølge som forplanter seg i en tynn stang, kan også lydbølger i gasser beskrives som partikler som svinger omkring et likevektspunkt (dvs.,



Figur 3.7: Gasspartikler i rør i likevekt (figur a) og skjøvet ut av likevekt (figur b)

da partiklene nå er mer uordnet enn i et fast stoff, må partiklenes utsving sees som en midling over et større antall partiklers tilfeldige bevegelser).

Fra figur 3.7 ser vi at

$$\Delta V = A\left\{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)\right\} \approx A\left\{\xi(x) + \Delta x\frac{\partial \xi}{\partial x} - \xi(x)\right\} = A\Delta x\frac{\partial \xi}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Om vi nå bruker likning (3.22) til å substituere $\Delta V/V$ i likning (**??**), får vi at

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -\gamma P\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{3.26}$$

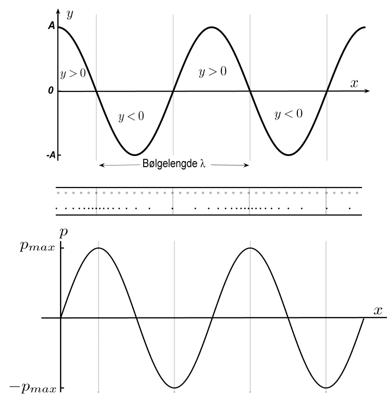
Dette er et viktig resultat, da det gir oss sammenhengen mellom svingningen i trykk og partiklenes svingninger rundt sitt likevektspunkt. Verdt å merke seg er at for en bølge beskrevet av en harmonisk funksjon vil trykkendring og partikkelutslag alltid være faseforskjøvet med en kvart periode i forhold til hverandre. Hvis partikkelutsvinget er beskrevet ved funksjonen $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$, er trykkendringen gitt som $\Delta P(x,t) = -\gamma P k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$. Figur 3.8 viser $\Delta P(x,t)$ og $\xi(x,t)$ ved $t = 0$.

3.4 Refleksjon, transmisjon og stående lydbølger

Det kan være en idé å repetere kapittel 2.4 før du fortsetter her. Vi skal nå ta for oss refleksjon og transmisjon av lydbølger når disse beveger seg fra et medium til et annet.

Figur 3.9 viser plane bølgefronter som beveger seg rett mot grenseflaten mellom to medier. I de to mediene vil lydbølgene ha fasehastigheter hhv $v_1 = \sqrt{B_1/\rho_1}$ og $v_2 = \sqrt{B_2/\rho_2}$. Som for transversale bølger på streng, har vi også her at bølgen blir delvis reflektert og delvis transmittert når den treffer grenseflaten. Her blir imidlertid de fysiske betingelsene i grenseflaten noe annerledes. Fortsatt har vi at utsvinget, ξ, må være kontinuerlig i grenseflaten. Vi lar grenseflaten ligge i $x = 0$ og lar innkommende lydbølge være gitt ved

$$\xi_i(x,t) = \xi_{i0}\sin(k_i x - \omega t). \tag{3.27}$$



Figur 3.8: Partikkelutsving $y(x)$ (øverste graf) og trykkendring $\Delta P(x)$ (nederste graf) for en lydbølge som forplanter seg i en gass. Figuren i midten viser partiklene i likevekt (hvite punkter) og skjøvet ut av likevekt (svarte punkter). Her ser vi at partikkelutsving og trykkendring er faseforskjøvet med en kvart periode i forhold til hverandre

Som før vil da reflektert bølge være beskrevet av

$$\xi_r(x,t) = \xi_{r0}\sin(k_i x + \omega t) \tag{3.28}$$

og transmittert bølge gitt ved

$$\xi_t(x,t) = \xi_{t0}\sin(k_t x - \omega t). \tag{3.29}$$

Vi ser så på et lite volumelement med lengde Δx som er forskjøvet ut av likevekt av en lydbølge som forplanter seg i mediet (3.10).

Fra Newtons 2. lov har vi at total kraft som virker på volumelementet er

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) - F(x) &= \Delta m \cdot a = \rho \Delta x A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{F(x+\Delta x)}{A} - \frac{F(x)}{A} &= \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

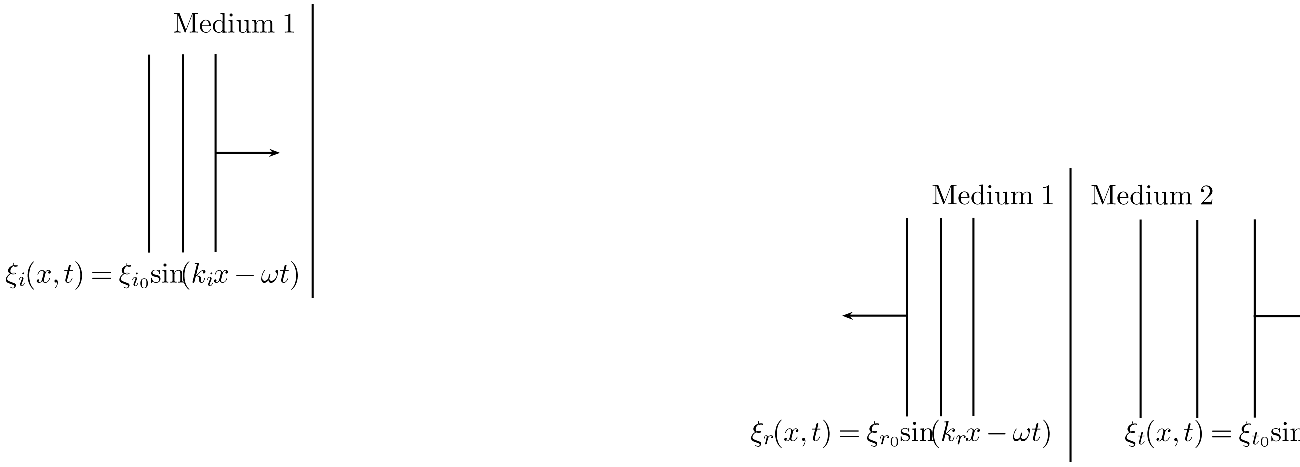
Høyre side i likning (3.30) går mot null når $\Delta x \to 0$. Følgelig har vi at F/A må være kontinuerlig i grenseflaten. Fra likning (3.18) følger:

$$\frac{F}{A} = -B \cdot \frac{\Delta L}{L} = -B\frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \Delta x \to 0 \tag{3.31}$$

Altså har vi at $B \cdot (\partial\xi/\partial x)$ må være kontinuerlig i grenseflaten. B betegner her bulkmodulen, som tidligere.

Kravet om kontinuitet i $B \cdot (\partial\xi/\partial x)$ gir likninga

$$B_1 k_i \xi_{i0} + B_1 k_i \xi_{r0} = B_2 k_t \xi_{t0}. \tag{3.32}$$



(a) (b)

Figur 3.9: Plane bølgefronter som beveger seg rett mot grenseflaten mellom to medier. Figur a) viser innkommende bølge. Figur b) viser reflektert og transmittert bølge. Legg merke til at ulik bølgehastighet i de to mediene medfører at bølgelengdene for reflektert og transmittert bølge blir ulik.

Kombinert med

$$\xi_{i0} - \xi_{r0} = \xi_{t0} \tag{3.33}$$

som følger av kontinuiteten av ξ i grenseflaten, gir likning (3.32) nå følgende uttrykk for amplitudene til reflektert og transmittert bølge:

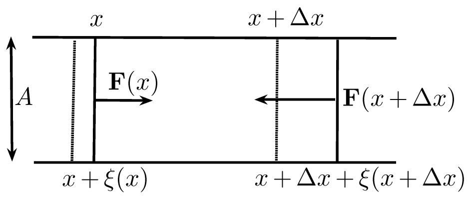
$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}} \xi_{i0} \tag{3.34}$$

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}} \xi_{i0} \tag{3.35}$$

I disse siste beregningene har vi satt inn at $k = 2\pi/\lambda = \omega/v \sim 1/v$, da omega er lik for innkommende, reflektert og transmittert bølge.

Kravet om energibevarelse, $\overline{P_i} = \overline{P_r} + \overline{P_t}$, gjelder også her. På samme vis som i likning 2.39 og 2.40 kan det nå utledes uttrykk for refleksjons- og transmisjonskoeffisientene for lydbølgen:

$$R = \frac{\left(\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2}{\left(\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2} \tag{3.36}$$



Figur 3.10

$$T = \frac{4\sqrt{\rho_2 B_2 \rho_1 B_1}}{\left(\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2} \tag{3.37}$$

Du kan selv sjekke at $R + T = 1$.

Stående lydbølger i luftsøyle

Vi tar for oss et luftrør med lengde L som ligger langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$. Røret er åpent i en ende og lukket i den andre. Ekvivalent med hvordan vi kan få stående, transversale bølger på en streng, kan vi få stående, longitudinale bølger i et slikt rør. Randbetingelser for longitudinale bølger i røret vil nødvendigvis være

- Det longitudinale utsvinget av luftpartikler, $\xi(x,t)$, må være null i den lukkede enden av røret, $\xi(0,t) = 0$.
- Avviket fra likevektstrykket P, $\Delta P(x,t)$, må være tilnærmet lik null ved den åpne enden av røret, $\Delta P(L,t) \approx 0$.

Da vi har fra likning (**??**) at $\Delta P = -B \cdot (\partial \xi / \partial x)$, kan vi slå fast at stående bølger i et slikt rør må ha

- et knutepunkt for ξ og en buk for ΔP i den lukkede enden $x = 0$
- en buk for ξ og et knutepunkt for ΔP i den åpne enden $x = L$

Bølgefunksjonen

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin kx \cos \omega t, \tag{3.38}$$

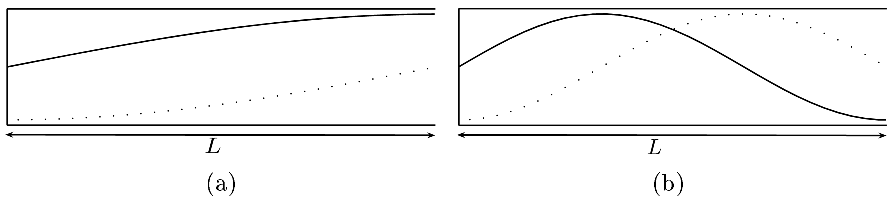
hvor

$$kL = n \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad n = 1, 3, 5 \ldots \tag{3.39}$$

oppfyller disse kravene. Likningene (3.38) og (3.39) gir følgende mulige bølgelengder, med tilhørende frekvens, for stående bølger i røret

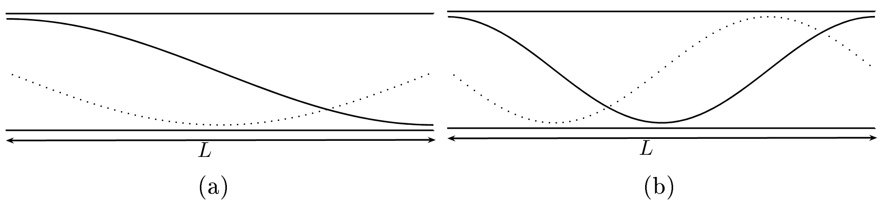
$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{n}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \qquad n = 1, 3, 5 \ldots \tag{3.40}$$

Figur 3.11 viser de to første stående harmoniske bølgene i et rør som er lukket i en ende. Heltrukket linje beskriver partikkelutsvinget $\xi(x)$. $\Delta P(x)$ er stiplet.



Figur 3.11: Stående lydbølger i rør som er lukket i en ende. Figur a viser grunnfrekvensen (n = 1). Figur b viser første harmoniske (n = 2)

Det er også mulig å få stående bølger i et rør som er åpent i begge ender. I så tilfelle har vi en ny randbetingelse; $\Delta P(L,t) = \Delta P(0,t) = 0$. Figur 3.12 viser mulige bølgelengder for stående harmoniske bølger i et slikt rør. Igjen er $\xi(x)$ heltrukket og $\Delta P(x)$ stiplet.



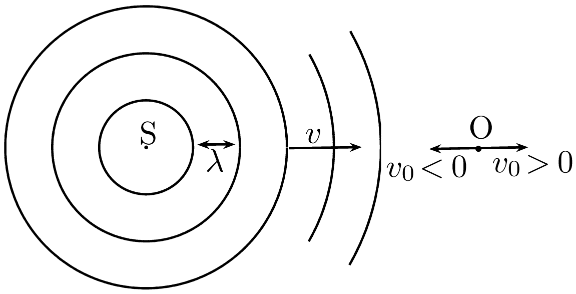
Figur 3.12: Stående lydbølger i rør som er åpent i begge ender. Vi ser at mulige bølgelengder i dette tilfellet f.eks. er $\lambda = 2L$ (figur a) og $\lambda = L$ (figur b)

3.5 Dopplereffekt

Du har kanskje lagt merke til at når en ambulanse med sirene nærmer seg, syns sirenetonen å falle i det ambulansen passerer? Dette fenomenet kalles dopplereffekt. Når en lydkilde og en observatør er i bevegelse relativt til hverandre, vil observatøren høre lyd med en annen frekvens enn den sendt ut fra lydkilden. I dette kapittelet studerer vi kun spesialtilfellet hvor lydkilde og observatør beveger seg langs samme rette linje. Vi lar S betegne lydkilden og O betegne observatøren.

Kilde i ro, observatør i bevegelse

La oss først se på tilfellet hvor en observatør O beveger seg med fart v_o mot eller bort fra en lydkilde S som står i ro, beskrevet i figur 3.13. Vi lar v_o være negativ dersom O beveger seg mot S. S sender ut kuleformede bølger med en fasehastighet $v = \lambda\nu$, som antas større enn $|v_o|$.



Figur 3.13

Om vi lar ν' betegne frekvensen O måler, kommer det fram av figuren at

- En O i ro ($v_o = 0$) vil motta ν bølgefronter per tidsenhet, og følgelig vil da $\nu' = \nu$.
- En O i bevegelse mot S ($v_o < 0$) vil motta mer enn ν bølgefronter per tidsenhet. Dette medfører at $\nu' > \nu$.
- En O i bevegelse bort fra S ($v_o > 0$) vil motta færre enn ν bølgefronter per tidsenhet. Dette gir $\nu' < \nu$.

Observatøren O vil måle en tilsynelatende bølgehastighet $v' = v - v_o$ og en bølgelengde λ. Altså vil O måle en frekvens

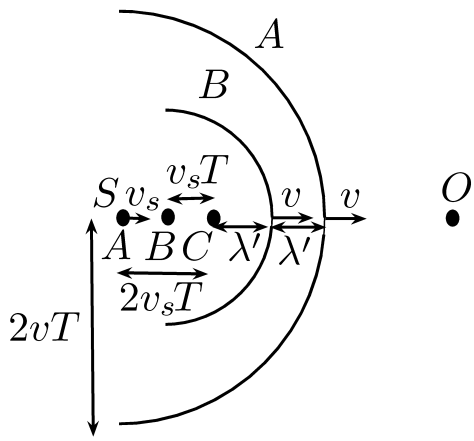
$$\nu' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v}\nu. \tag{3.41}$$

Kilde i bevegelse, observatør i ro

Om vi i stedet holder observatøren O i ro, og lar lydkilden S være i bevegelse med en hastighet v_s henholdsvis mot ($v_s > 0$) eller bort fra O ($v_s < 0$), viser figur 3.14 hva som skjer.

Figuren viser to kuleformede bølgefronter sendt ut av S, markert A og B. Merk at

- S i posisjon A ved $t = 0$ lager bølgefront A med radius $2vT$ og sentrum i A ved $t = 2T$
- S i posisjon B ved $t = T$ lager bølgefront B med radius vT og sentrum i B ved $t = 2T$
- S i posisjon C ved $t = 2T$ lager en bølgefront C med radius null og sentrum i C ved $t = 2T$



Figur 3.14

Legg merke til at det nå er bølgelengden λ av lydbølgene observatøren O vil oppfatte som endret, og ikke hastigheten v (som i tilfellet over). Dette skyldes at bølgelengden er gitt som avstanden mellom to suksessive bølgefronter, og denne endres i det lydkilden S settes i bevegelse. Dersom S beveger seg bort fra O, vil O måle en bølgelengde λ' slik at $\lambda' > \lambda$. Beveger S seg mot O, vil O måle en $\lambda' < \lambda$.

Av figur 3.14 ser en at $2v_sT + 2\lambda' = 2vT$. Dette gir at observatøren O måler en tilsynelatende bølgelengde $\lambda' = (v - v_s)T$. Så lenge O er i ro, vil O måle en bølgehastighet av lydbølgen $v' = v$. Følgelig vil O måle en frekvens

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_s}\frac{1}{T} = \frac{v}{v - v_s}\nu. \tag{3.42}$$

Både kilde og observatør i bevegelse

Dersom både lydkilden S og observatøren O settes i bevegelse, forteller de to foregående avsnitt oss at både bølgehastighet v' og bølgelengde λ' målt av O vil være forskjellig fra bølgehastighet og bølgelengde målt av S. Følgelig vil O i dette tilfellet måle en frekvens

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v - v_o}{(v - v_s)T} = \frac{v - v_o}{v - v_s}\nu. \tag{3.43}$$

Merk at $v_s > 0$ når lydkilden beveger seg mot observatøren, men $v_o < 0$ når observatøren beveger seg mot lydkilden.

Mediet i bevegelse

Bølgehastigheten v i de foregående delkapitler angir bølgehastigheten relativt til mediet lydbølgene forplanter seg i (f.eks. luft). Hastighetene v_o og v_s er angitt i forhold til bakken. Det er fram til nå antatt at bakken og mediet ikke er i bevegelse relativt til hverandre. Antar vi imidlertid at mediet beveger seg med en hastighet v_m relativt til bakken, vil en observatør O som lytter til en lydkilde S måle en frekvens

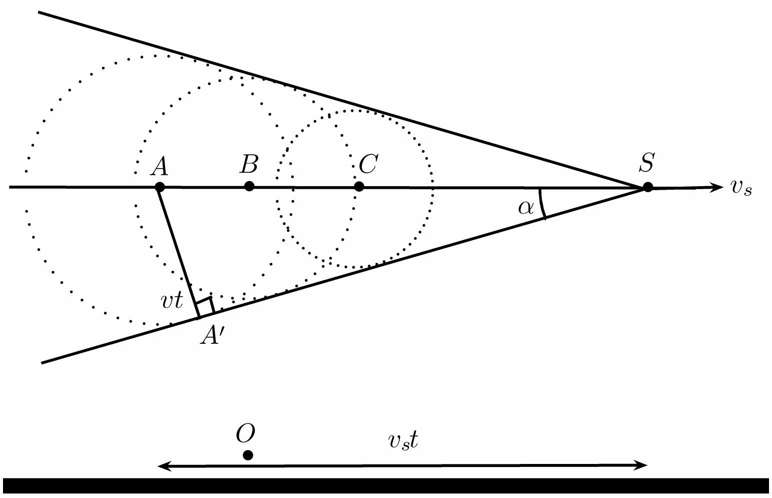
$$\nu' = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s}\nu. \tag{3.44}$$

Merk at mediets hastighet v_m er positiv når det beveger seg i samme retning som bølgen.

3.6 Sjokkbølger

Vi vender tilbake til tilfellet hvor en lydkilde S er i bevegelse med hastighet v_s og en observatør O er i ro. La oss nå anta at $v_s > v$, hvor v betegner hastigheten til lydbølgene (som over). Lydkilden S kalles da et overlydsobjekt, og eksempler på slike er raske fly eller geværkuler.

Når vi har med et overlydsobjekt å gjøre, vil ikke lenger Dopplereffekten være beskrivende for hva en observatør vil måle eller høre. Vi tar for oss tilfellet hvor S er et fly. Figur 3.15 viser hva som skjer.



Figur 3.15: Sjokkbølge laget av fly S med større hastighet enn lydhastigheten

Når flyet beveger seg gjennom luften, komprimeres luften og lydbølger dannes. Ved $t = 0$ er flyet i punktet A. Her oppstår det da en kuleformet bølgefront sentrert i A. En tid t senere har bølgefronten i A propagert utover til en kule med radius vt. Samtidig har flyet beveget seg en lengre avstand v_st til posisjonen S. Vi ser at samtlige bølgefronter samler seg inne i en kjegle med toppvinkel 2α, bestemt ved

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_s}. \tag{3.45}$$

Langs linjen A'S på figur 3.15 finner en nå en høy tetthet av bølgefronter. Linjen beveger seg mot observatøren O på bakken, og en bølge med stor lydstyrke vil ankomme O helt uten forvarsel. Herfra stammer navnet sjokkbølge. Det er verdt å merke seg at det er kompresjonen av luft grunnet flyets bevegelse gjennom den som skaper sjokkbølgen. En eventuell lydkilde inne i S er typisk uten betydning.

Forholdet v_s/v refereres til som Mach-tallet, og betegnes M:

$$M = \frac{v_s}{v} \tag{3.46}$$

Fra dette følger det at $\sin\alpha = 1/M$

3.7 Svevning

To superponerte bølger (f.eks. lydbølger) med lik amplitude og fasekonstant (f.eks. $\phi = 0$), men med *litt* ulik frekvens, gir opphav til fenomenet svevning (eng beat). Vi ser på superponeringen av ξ_1 og ξ_2, hvor $\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$ og $\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$, og velger $\omega_2 > \omega_1$, $k_2 > k_1$. Dette gir en resultantbølge

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t), \tag{3.47}$$

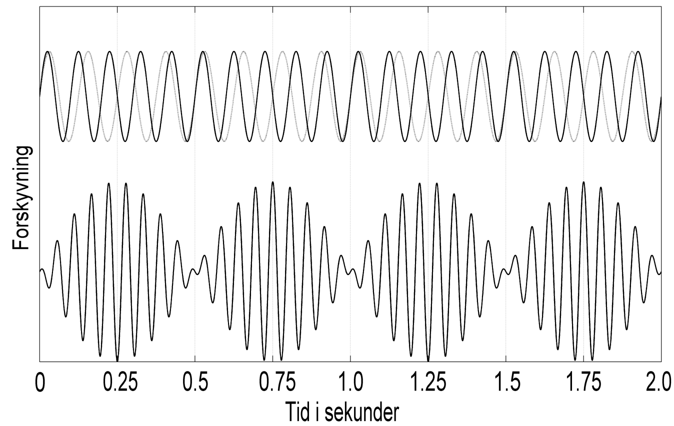
som ved bruk av identiteten $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ kan skrives som

$$\begin{aligned}
\xi(x,t) &= \xi_0 \sin(k_1 x + \omega_1 t) + \xi_0 \sin(k_2 x + \omega_2 t) \\
&= 2\xi_0 \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \\
&= 2\xi_0 \sin(kx - \omega t)\cos(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

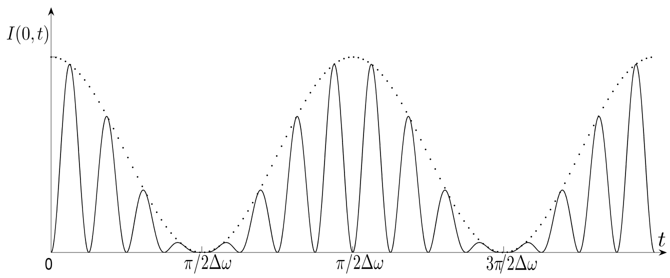
der $k \equiv (k_1+k_2)/2$, $\omega \equiv (\omega_1+\omega_2)/2$, $\Delta k \equiv (k_2-k_1)/2$ og $\Delta\omega \equiv (\omega_2-\omega_1)/2$. Merk at her er $\Delta k << k$ og $\Delta\omega << \omega$, da frekvensen til ξ_1 bare er *litt* forskjellig fra frekvensen til ξ_2. Figur 3.16 viser ξ_1, ξ_2 og resultantbølgen ξ. En ser at resultantbølgen ξ blir en forsterket bølge når de to opprinnelige bølgene er i fase og en utslukket bølge når de to opprinnelige bølgene er i motfase. ξ blir totalt en raskt varierende "bærebølge" $\sin(kx - \omega t)$ modulert med en langsomt varierende "modulasjonsbølge" $\cos(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)$.

En kan så se på hastigheten ξ forplanter seg i rommet med. Omskrivningene $\sin(kx - \omega t) = \sin k(x - (\omega/k)t)$ og $\cos(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t) = \cos \Delta k(x - (\Delta\omega/\Delta k)t)$ viser at bærebølgen og modulasjonsbølgen forplanter seg med hastighetene $v_{\text{bære}} = \omega/k$ og $v_{mod} = \Delta\omega/\Delta k$. I tilfellet hvor Δk og $\Delta\omega$ er små, har vi at $\Delta\omega/\Delta k \approx d\omega/dk$. Da kjenner vi igjen modulasjonsbølgens hastighet som gruppehastigheten til en bølgepakke, jfr kap 2.6.

Om intensiteten av ξ vet vi at $I \sim |\xi|^2 \sim \cos^2(\Delta kx - \Delta\omega t)$. Figur 3.17 viser intensiteten I som funksjon av tid i posisjonen $x = 0$.



Figur 3.16: Bølgene ξ_1 og ξ_2 øverst i figuren. Resultantbølgen ξ, superponeringen av disse to, nederst i figuren



Figur 3.17: Intensiteten I av resultantbølgen ξ som funksjon av tiden t i posisjon $x = 0$

Av figuren ser vi at vi i denne posisjonen vil høre en variasjon i lydstyrke. Vi hører maksimal lyd med periode $T_s = \pi/\Delta\omega$. Det er denne variasjonen som kalles svevning, og frekvensen til variasjonen kalles svevefrekvens, ν_s:

$$\nu_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1 \tag{3.49}$$

Vi har at svevefrekvensen er forskjellen i frekvens mellom de to opprinnelige bølgene.

Svevning er en følsom metode for måling av små frekvensforskjeller. Et bruksområde for dette er stemming av instrumenter [2].

[2]En stemmegaffel gir en referansefrekvens. Når en streng så slås eller strykes, vil stemmeren høre svevning som en pulsering i tonen. Dersom svevning oppstår, vet stemmeren at strengen ikke svinger med frekvens nøyaktig tilsvarende stemmegaffelens, og strengen må strammes eller slakkes.

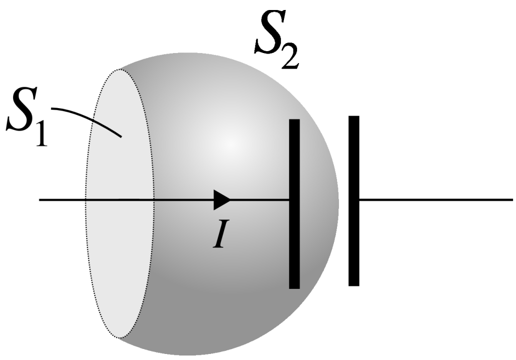
4 Elektromagnetiske bølger

4.1 Ampere-Maxwells lov

I elektromagnetismekurset i 1. klasse ble Amperes lov brukt på denne formen:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.1}$$

Her er I strømmen som omsluttes av kurven C, eller mer presist: Strømtettheten $\mathbf{j}$ integrert over flaten S som har C som rand. Det finnes mange mulige flater S som har C som rand, og vi kan velge som vi vil. Et problem oppstår hvis vi ser på et system der ladning hoper seg opp, slik som på kondensatoren i figur 4.1. Da vil vi få forskjellige strømmer for forskjellige valg av S.



Figur 4.1

Flaten S_1 i figur 4.1 har en strøm $I_1 \neq 0$ gjennom seg, mens strømmen gjennom S_2 er $I_2 = 0$. Valget av flate endrer ikke fysikken, så magnetfeltet, og dermed kurveintegralet på venstre side av (4.1), er uendret. Vi trenger en korreksjon til Amperes lov.

Kontinuitetslikningen

Ladning er en bevart størrelse. Dette gjelder for universet som helhet (global bevaring), men også for et vilkårlig volum, stort eller lite (lokal bevaring). Ladning kan bevege seg ut av det volumet vi velger oss, men ikke uten å krysse randa til området. Dette gir oss kontinuitetslikninga:

$$\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\text{Endring i ladning i volumet}} + \underbrace{\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}}_{\text{Ladning som forlater volumet}} = 0 \tag{4.2}$$

Maxwells korreksjon

Vi kan se hva som er galt med (4.1) hvis vi setter den opp for de to forskjellige valgene av flate vist i figur 4.1:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

Nå trekker vi den første av disse fra den andre, og får

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \mu_0 \left(\int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} - \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \right) = \mu_0 \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.3)$$

Her er flaten S den lukkede flaten vi får når vi setter sammen S_1 og S_2. At det er differansen av flatene som gir den lukkede flaten, skyldes at normalvektoren til S_1 peker innover i S. Høyre side kjenner vi igjen fra kontinuitetslikningen – den er lik $\mu_0 dq/dt$ som generelt ikke er lik null. Vi fortsetter å regne for å finne hva vi mangler for at Amperes lov skal holde.

Vi kan finne et annet uttrykk for dq/dt ved å derivere Gauss' lov med hensyn på tida. Da får vi

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} &= -\frac{dq}{dt} = -\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= -\varepsilon_0 \left(\frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} - \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) \end{aligned}$$

etter å ha splittet opp integralet over den lukkede flaten i integraler over S_1 og S_2, flatene vi startet med[1]. Dette er korreksjonsleddet vi er ute etter, slik at Ampere-Maxwells lov blir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Nå prøver vi igjen å sette opp likningen over for de to flatene og trekke dem fra hverandre:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

[1] Denne måten å fordele korreksjonsleddet på kan virke tilfeldig. Grunnen til at den allikevel er riktig, er at de to flatene kan velges helt fritt – vi kunne gjentatt det samme beviset for et uendelig antall flater, og vi hadde kommet i mål hver gang. Det viser at det ikke er et heldig valg av flater som hjelper oss i mål her. Den som fortsatt er i tvil oppfordres til å se på det samme beviset på differensialform (kapittel 4.2 hjelper deg i gang).

Differansen mellom venstresidene er null. Trekker vi likningene fra hverandre, får vi

$$0 = \mu_0 \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} - \left(\mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right).$$

Nå samler vi integraler med samme integrand. Vi ser at vi får to integraler, begge over samme lukkede flate:

$$0 = \mu_0 \left(\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

Det siste av disse integralene kjenner vi igjen – det er lik $\frac{dq}{dt}$. Vi setter inn og får

$$0 = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \frac{dq}{dt}.$$

Dette er kontinuitetslikningen (4.2), som vi fra før vet at holder. Korreksjonen vi har valgt må altså være riktig.

Korreksjonsleddet kalles gjerne *forskyvningsstrøm* (eng: *displacement current*). Korreksjonsleddet viser at Amperes lov er feil når vi har med tidsavhengige elektriske felter å gjøre. I tillegg viser korreksjonsleddet at det rundt kondensatoren i figur 4.1 dannes et magnetfelt akkurat som om kondensatoren ikke hadde vært der, og strømmen hadde gått tvers igjennom. Dette magnetfeltet er senere blitt målt, og resultatene stemmer overens med Maxwells korrigerte versjon av Amperes lov.

4.2 Maxwells likninger på differensialform

Når vi senere skal utlede bølgelikningen for det elektriske og magnetiske feltet, er det mye enklere å jobbe med Maxwells likninger på differensialform enn på integralform, slik vi har sett dem til nå. Manipulasjonene som skal til er nokså enkle, og trikset er å bruke divergensteoremet[2] og Stokes' teorem[3] til å få integraler med samme integrasjonsområde på begge sider av likningene.

På integralform er Maxwells likninger

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss' lov)} \qquad (4.5)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad \text{(Gauss' lov for } \mathbf{B}\text{)} \qquad (4.6)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(Faraday-Henrys lov)} \qquad (4.7)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(Ampere-Maxwells lov)} \qquad (4.8)$$

[2] $\int_V \nabla \cdot \mathbf{G} \, dV = \oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{A}$, der S er overflaten som omslutter volumet V.

[3] $\int_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l}$, der kurven C er randa til flata S.

I flere av omformingene skal vi bruke to sammenhenger:

$$q = \int_V \rho \, dV \tag{4.9}$$

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.10}$$

Vi starter med Gauss' lov. Vi bruker divergensteoremet til å omforme venstresida til et volumintegral og setter inn (4.9) på høyre side:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

Siden integralene er gyldige for vilkårlige volum V, må integrandene være like over alt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.11}$$

Dette er Gauss' lov på differensialform. Med samme framgangsmåte blir Gauss' lov for $\mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{4.12}$$

I Faraday-Henrys lov bruker vi Stokes' teorem til å omforme venstresida til et flateintegral over S,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A},$$

og igjen har vi integrasjon over like, vilkårlige områder, slik at integrandene må være like. Faraday-Henrys lov blir

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{4.13}$$

Ampere-Maxwells lov angriper vi på samme måte som Faraday-Henrys. I tillegg til omformingene av integralene bruker vi (4.10) til å sette inn for I. Da får vi

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A},$$

og nok en gang må integrandene være like. Ampere-Maxwells lov på differensialform blir

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4.14}$$

Maxwells likninger på differensialform

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss' lov)} \tag{4.15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Gauss' lov for } \mathbf{B}\text{)} \tag{4.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faradays lov)} \tag{4.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ampere-Maxwells lov)} \tag{4.18}$$

4.3 Bølgelikningen for E og B

Vi skal se på elektriske og magnetiske felt i vakuum. I vakuum er det ingen ladning og heller ingen strøm ($\rho = 0$ og $I = 0$ over alt); derfor blir Maxwells likninger i vakuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{4.19}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.20}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.21}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4.22}$$

Vi starter med å ta curlen til (4.21):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

Deretter setter vi inn for $\nabla \times \mathbf{B}$ ved hjelp av (4.22) og får

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{4.23}$$

Vi skal til slutt bruke en vektoridentitet på venstresiden. For ethvert vektorfelt gjelder

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla^2 \mathbf{G} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}),$$

men siden $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i vakuum, forenkles dette til

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E} \tag{4.24}$$

Når vi bruker identiteten over, blir (4.23)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{4.25}$$

som er en tredimensjonal bølgelikning for alle de tre komponentene av det elektriske feltet. Med omtrent samme framgangsmåte finner vi samme bølgelikning for det magnetiske feltet:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{4.26}$$

Utifra likningene ser vi at hastigheten disse bølgene forplanter seg med må være

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}. \tag{4.27}$$

Bølgelikningene for elektromagnetiske felt

Elektromagnetiske bølger i vakuum beskrives av disse likningene:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Bølgene forplanter seg med lyshastigheten,

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Ser vi på plane bølger som forplanter seg i z-retning, vil feltene være uavhengig av x og y. Derivasjonene med hensyn på x og y i Laplaceoperatoren gir derfor ikke noe bidrag, og bølgelikningen i en dimensjon kan skrives

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Bølgelikningen for det magnetiske feltet i en dimensjon er tilsvarende.

4.4 Egenskaper ved elektromagnetiske bølger

Utledningen i avsnittet over viser at alle løsninger av Maxwells likninger i vakuum må oppfylle bølgelikningene for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$. Det motsatte er ikke tilfelle: Det finnes løsninger av bølgelikningene som *ikke* løser Maxwells likninger. Vi skal se at Maxwells likninger stiller bestemte krav til egenskapene til elektromagnetiske bølger.

I utledningene skal vi se på en plan, harmonisk bølge. For enkelhets skyld lar vi bølgen propagere i $\hat{\mathbf{z}}$-retning, slik at bølgetallsvektoren kan skrives $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t + \phi_E) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(kz - \omega t + \phi_B) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Selv om vi bruker denne bølgen i utledningene, vil resultatene vi kommer fram til være gyldige for alle elektromagnetiske bølger.

Superposisjon

Siden bølgelikningen det elektriske og magnetiske feltet oppfyller er homogen og lineær, er en sum av to løsninger også en løsning. Maxwells likninger er også lineære, så de hindrer ikke superposisjon.

Bølgene er transversale

Vi starter med å se på hva som skal til for å oppfylle Gauss' lov i vakuum, likning (4.19):

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\mathbf{E}_0 \cos\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\right) &= \mathbf{E}_0 \cdot \left(\nabla \cos\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\right) \\ = \mathbf{E}_0 \cdot \left(-k \sin\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\hat{\mathbf{z}}\right) &= -E_{0z} k \sin\left(kz - \omega t + \phi_E\right) \end{aligned}$$

Skal det siste uttrykket være null overalt, må vi ha $E_{0z} = 0$. Det elektriske feltet har ingen komponent langs $\hat{\mathbf{z}}$, bølgens forplantningsretning. Kravet fra likning (4.20) gir nøyaktig samme resultat for $\mathbf{B}$. Altså har vi

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \tag{4.29}$$

som viser at elektromagnetiske bølger er transversale.

E-bølgen og B-bølgen er i fase

Vi ser på kravet fra (4.21), Faraday-Henrys lov i vakuum:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\mathbf{E}_0 \cos\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\right] &= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{B}_0 \cos\left(kz - \omega t + \phi_B\right)\right] \\ \left[\nabla \cos\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\right] \times \mathbf{E}_0 &= -\mathbf{B}_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\left(kz - \omega t + \phi_B\right)\right] \\ \left[k \sin\left(kz - \omega t + \phi_E\right)\hat{\mathbf{z}}\right] \times \mathbf{E}_0 &= \mathbf{B}_0 \omega \sin\left(kz - \omega t + \phi_B\right) \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0\right) \sin\left(kz - \omega t + \phi_E\right) = \mathbf{B}_0 \sin\left(kz - \omega t + \phi_B\right) \tag{4.30}$$

Skal den siste likninga holde, må vi ha[4] $\phi_E = \phi_B$. Dette betyr at $\mathbf{E}$-bølgen er i fase med $\mathbf{B}$-bølgen.

[4] Formelt sett er $\phi_E = \phi_B + \pi$ også en mulig løsning – det medfører et fortegnsskift for $\mathbf{B}_0$. Fortegnsskift for $\mathbf{B}_0$ og en faseforskyvning π tilsvarer dobbelt fortegnsskift for $\mathbf{B}$, så fysikken blir den samme uansett hvordan vi velger ϕ_E og ϕ_B.

E-feltet står vinkelrett på B-feltet

Med $\phi_E = \phi_B$ kan vi stryke sinusfaktorene i (4.30). Da får vi

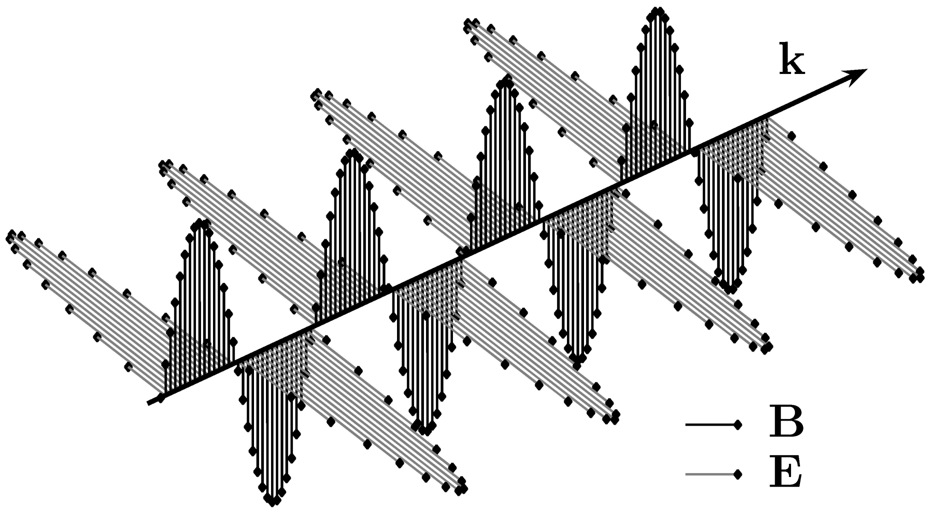
$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{k}\mathbf{B}_0 = c\mathbf{B}_0. \tag{4.31}$$

Siden vi allerede vet at både **E** og **B** står vinkelrett på forplantningsretningen, kan vi nå slutte at **E** og **B** står vinkelrett på hverandre.

likning (4.31) gir oss også forholdet mellom amplitudene til **E**- og **B**-feltet:

$$E = cB \tag{4.32}$$

Til nå har vi sett på kravene fra de tre første av Maxwells likninger. Den fjerde, likning (4.22), reproduserer bare kravene som kommer fra Faradays lov.



Figur 4.2: Elektromagnetisk bølge

4.5 Energi og impuls

I kapittel 2.3 fant vi uttrykk for hvor mye energi og impuls som transporteres med bølger. Vi skal overføre noen av resultatene til elektromagnetiske bølger. Alle resultatene vi finner her kan også finnes uten bruk av sammenhenger fra tidligere kapitler ved å gå ut ifra at elektriske og magnetiske felt har både energi og impuls[5].

[5]Den som er interessert i detaljene, kan for eksempel lese DJ Griffiths: *Introduction to Electrodynamics*, kap. 8-9.

Energi transportert med elektromagnetisk bølge

Fra elektromagnetisme kjenner vi energitettheten u i elektrisk og magnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{4.33}$$

For elektromagnetiske bølger er forholdet mellom E og B kjent, så vi kan uttrykke energitettheten ved bare ett av feltene. Vi setter inn fra likning (4.32) og bruker $c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ og får

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \varepsilon_0 E^2. \tag{4.34}$$

Elektromagnetiske bølger bærer med seg energi. Bølgens *intensitet* I er gjennomsnittet av hvor mye energi som strømmer gjennom en enhet flate normalt på forplantningsretningen per tidsenhet. Som for mekaniske bølger finner vi intensiteten ved å gange gjennomsnittlig energitetthet med hastigheten[6]:

$$I = c\left\langle u \right\rangle = c\varepsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle \tag{4.35}$$

Poyntings vektor

For å beskrive energi og impuls i elektromagnetiske bølger, er det vanlig å bruke *Poyntings vektor*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{4.36}$$

Hvis vi sammenlikner definisjonen over med likning (4.31), ser vi at retningen til $\mathbf{S}$ er den samme som bølgens forplantningsretning: $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{k}}$. Vi kan også regne ut absoluttverdien av $\mathbf{S}$:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{1}{\mu_0}E\left(\frac{E}{c}\right) = c\frac{1}{c^2\mu_0}E^2 = c\varepsilon_0 E^2 = cu \tag{4.37}$$

Absoluttverdien til $\mathbf{S}$ er altså hvor mye energi som transporteres med bølgen per tids- og flateenhet. Retningen til $\mathbf{S}$ er retningen energien forplanter seg i. Vi kan se på $\mathbf{S}$ som *energifluksteffhet* – hvis vi vil vite effekten gjennom en flate, integrerer vi $\mathbf{S}$ over flaten: $P_A = \int_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$. Sammenhengen mellom intensiteten og Poyntings vektor er nå enkel å finne:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = I\hat{\mathbf{k}} \tag{4.38}$$

Dette viser hvordan vi kan bruke $\mathbf{S}$ for å finne intensiteten til en bølge.

[6]Her betyr trekantparenteser tidsmidling, altså tar vi gjennomsnittet over en periode: $\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E^2 dt$.

Impuls i elektromagnetisk bølge

Fra kapittel 2.3 har vi at impulstettheten i en bølge er energitettheten delt på hastigheten. Overført til elektromagnetiske bølger blir impulstettheten

$$\pi = \frac{u}{c} = \varepsilon_0 \mu_0 S \tag{4.39}$$

eller på vektorform

$$\boldsymbol{\pi} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}. \tag{4.40}$$

4.6 Stråling

Så langt har vi studert elektromagnetiske bølger uten å se nærmere på hvordan bølgene oppstår. Mye av teorien bak elektromagnetisk stråling er kompleks, så i de konkrete eksemplene våre skal vi bruke en del resultater uten å utlede dem. Men før vi kommer så langt, skal vi se nærmere på hva vi kan si om de elektriske og magnetiske feltene rundt en strålingskilde uten å regne noe særlig.

Kjennetegnet på elektromagnetisk stråling er at elektromagnetiske bølger frakter energi vekk fra strålingskilden. Hvis vi ser på en kulesymmetrisk kilde med konstant effekt P_{kilde} i tomt rom, er det ingenting som absorberer energien i strålingen. Et ufravikelig krav må da være at energien ikke hoper seg opp noe sted – energifluksen ut gjennom en vilkårlig flate som omslutter strålingskilden må være lik effekten til kilden:

$$\langle P_{\text{kilde}} \rangle = \oint_A \langle \mathbf{S}(r) \rangle \cdot d\mathbf{A} \tag{4.41}$$

For å gjøre regninga enklere, ser vi på et kuleskall med radius r og kilden i sentrum. Siden kilden er kulesymmetrisk, blir integralet i (4.41) trivielt å løse:

$$P_{\text{kilde}} = 4\pi r^2 S(r)$$

Foreløpig har vi $P_{\text{kilde}} \propto r^2 S(r)$, men P_{kilde} skal være uavhengig av r. Det krever at $S(r)$ har "motsatt" r-avhengighet av r^2. For at P_{kilde} skal ha samme verdi for alle r, må vi altså ha

$$S(r) \propto \frac{1}{r^2}.$$

Siden $S \propto E^2$, får vi

$$E(r) \propto \frac{1}{r} \tag{4.42}$$

Fra elektromagnetisme kjenner vi godt til elektriske felter som avtar som $1/r^2$ eller raskere. Opphavet til disse feltene har vært ladninger i ro eller ladninger i bevegelse med konstant hastighet. Det er altså tydelig at verken ladninger i ro eller ladning med konstant hastighet kan være opphav til elektromagnetisk stråling. Det må være *akselererte ladninger* som er ansvarlige for elektromagnetisk stråling.

Oscillerende dipol

Et av de enkleste eksemplene (selv om det ikke er så enkelt) på en strålingskilde, er en oscillerende dipol (figur 4.3). Vi driver ladning fram og tilbake mellom to metallkuler, slik at ladningen på dem er

$$q(t) = q_0 \sin \omega t.$$

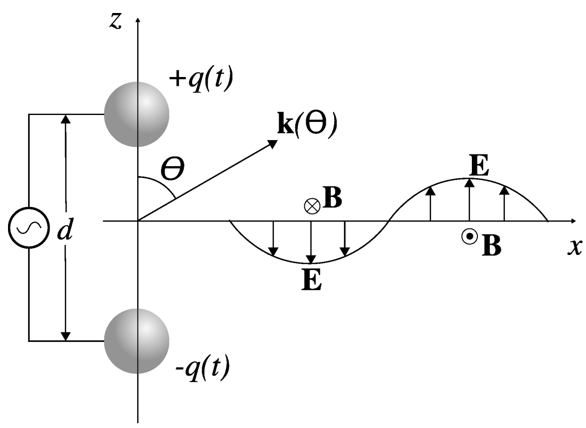
Det resulterer i et dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = q_0 \mathbf{d} \sin \omega t = \mathbf{p_0} \sin \omega t. \tag{4.43}$$

Da kan det vises at intensiteten til en slik dipol er

$$I = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \tag{4.44}$$

Legg merke til sinusfaktoren – dipolen stråler ikke ut noe som helst langs aksen (på aksen har vi $\sin \theta = 0$), mens vi finner intensitetsmaksimum normalt på dipolens akse. Vi ser også at intensiteten avtar som $1/r^2$, slik den må gjøre.



Figur 4.3: Oscillerende dipol

For å finne kildens effekt, integrerer vi over et kuleskall med radius r:

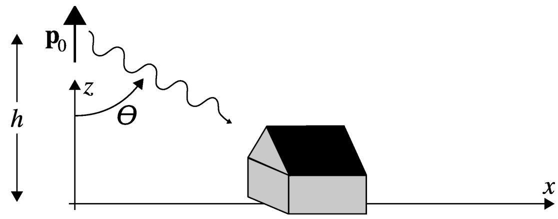
$$\langle P \rangle = \oint_A I dA = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Effekten blir da

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}. \tag{4.45}$$

Eksempel 4.1: Intensitet fra dipolantenne

En radiosender er satt opp i høyde h over bakken i et helt flatt nabolag. Radiosenderen er ei elektrisk dipolantenne med dipolmoment rettet vertikalt. En ingeniør har målt strålingen rett under antenna og konkludert med at strålingen er svakere enn grenseverdiene. Likevel klager naboene på at datamaskiner, stereoanlegg og annet elektronisk utstyr har oppført seg merkelig etter at antenna ble satt i drift.



Figur 4.4

Oppgave:

1. Kan strålingen fra antenna ha noe med naboenes problemer å gjøre, selv om strålingen er lavere enn grenseverdiene?

2. Hvor burde ingeniøren ha gjort målingene sine?

Løsning:

1. Vi bruker koordinatsystemet fra figur 4.4. Rett under antenna har vi $\theta = 0$. Setter vi det inn i intensitetsformelen, likning (4.44), ser vi at intensiteten rett under antenna er $I = 0$. Det ingeniøren har målt, er bare bakgrunnsstøy som ikke har noe med antenna å gjøre. Denne målinga er altså ingen garanti for at strålingsnivået er akseptabelt hos naboene!

2. Vi må finne det punktet på x-aksen hvor strålingen har størst intensitet. Intensitetsformelen er avhengig av r og θ; sammenhengen mellom disse to og x er

$$r^2 = x^2 + h^2\,; \qquad \sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}},$$

forutsatt at vi er på x-aksen. Dette setter vi inn i likning (4.44):

$$I = \underbrace{\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}}_{a} \frac{x^2}{(x^2+h^2)^2}\,; \qquad \frac{dI}{dx} = a\frac{2x\left(h^2-x^2\right)}{\left(x^2+h^2\right)^3}$$

Vi setter $\frac{dI}{dx} = 0$ for å finne intensitetsmaksimum og løser for $x > 0$.

$$0 = h^2 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = h$$

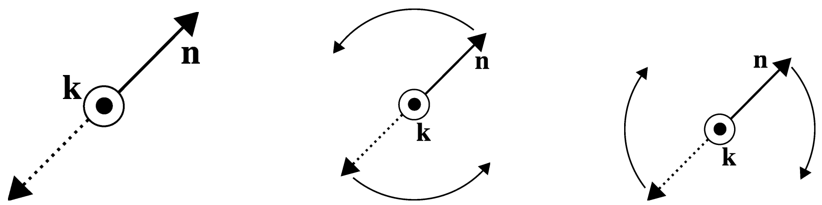
Målingen av intensiteten bør altså gjøres i en avstand h fra foten av antenna. Hvis intensiteten der er akseptabel, vil den være det overalt ellers også.

4.7 Polarisering

Elektromagnetiske bølger er et eksempel på transversale bølger, der både **E**- og **B**-feltet er normale på forplantningsretningen. Men det er mange retninger som står normalt på forplantningsretningen – hvis bølgen forplanter seg i z-retning, kan **E** peke i en hvilken som helst retning i xy-planet. Det samme gjelder for andre transversale bølger, for eksempel bølger på en streng. Beskrivelsen av en transversal bølge som forplanter seg i rommet er ikke komplett før vi har sagt i hvilken retning utslaget eller feltet peker. Denne retningen kalles bølgens polarisasjonsretning.

Polarisasjonen angis vanligvis med en enhetsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ som peker langs polarisasjonsretningen. For elektromagnetiske bølger er det vanlig å la **E** peke langs $\hat{\mathbf{n}}$ – retningen til **B** er da bestemt av Maxwells likninger. Et eksempel på en lineærpolarisert elektromagnetisk bølge blir da

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \hat{\mathbf{n}} \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{B} &= B_0 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$



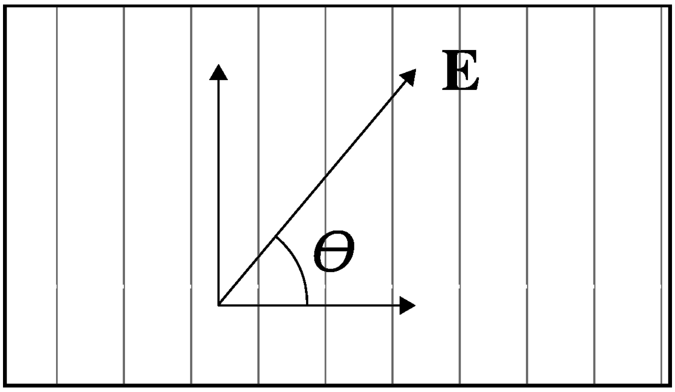
(a) Lineærpolarisert (b) Venstresirkulærpolarisert (c) Høyresirkulærpolarisert

Figur 4.5: Forskjellige polariseringer. Bølgen forplanter seg ut av papiret. Den heltrukne pila er $\hat{\mathbf{n}}$, den stiplede er $-\hat{\mathbf{n}}$.

Det finnes flere typer polarisering enn bare lineærpolarisering – bølgene kan også være sirkulærpolarisert, slik at $\hat{\mathbf{n}}$ roterer rundt forplantningsretningen (se figur 4.5).

Malus' lov

Den enkleste måten å sjekke polariseringa til elektromagnetiske bølger på, er å bruke et polarisasjonsfilter. Filteret stopper bølger med en bestemt polarisering, mens alt annet slipper igjennom. Vi kan se for oss at filteret er bygd opp av mange tynne, parallelle elektriske ledere som ligger tett i tett.



Figur 4.6: Polarisasjonsfilter med aksen horisontalt.

Når en elektromagnetisk bølge går igjennom et slikt filter, vil ikke den komponenten av det elektriske feltet som er parallell med lederne i filteret slippe gjennom. Det elektriske feltet parallelt med lederne setter elektronene i lederne i bevegelse, slik at feltet fra lederne kansellerer feltet til bølgen. Energien i bølgen som stoppes av filteret går over til varme i filteret, eller blir strålt ut igjen i en vilkårlig retning (slik at bølgene blir spredt).

Hvis det elektriske feltet i den innkommende bølgen har amplitude E_0, vil amplituden til den komponenten som går gjennom filteret være $E_0 \cos\theta$. Intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden til det elektriske feltet: $I \propto E^2$. Når den innkommende bølgen har intensitet I_0, blir intensiteten etter filteret

$$I = I_0 \cos^2\theta. \tag{4.47}$$

Dette er kjent som *Malus' lov*.

4.8 Elektromagnetiske bølger i stoff

Vi skal bruke Maxwells likninger til å vise at det finnes elektromagnetiske bølger i stoff. Likningene i materie er:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}} \tag{4.48}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \tag{4.49}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.50}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.51}$$

Når vi skal se nærmere på elektromagnetiske bølger i stoff, skal vi gjøre en del antagelser. Disse antagelsene er gode for de fleste gjennomsiktige medier vi er vant med, som vann, glass og plast.

- Det er ingen fri ladning og ingen fri strøm.
- Mediene er lineære, slik at $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ og $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$.
- Mediene er homogene, slik at verken ε eller μ varierer i et medium.

Siden bølgelikninga gjelder for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$, eliminerer vi $\mathbf{D}$ og $\mathbf{H}$ med en gang. Maxwells likninger på integralform blir da

$$\oint_S \varepsilon\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \tag{4.52}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \tag{4.53}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.54}$$

$$\oint_C \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \tag{4.55}$$

Her beholder vi ε og μ inni integraltegnene, siden vi senere skal se på grenseflatene mellom to medier.

Hvis vi sammenlikner disse likningene med Maxwells likninger i vakuum, ser vi at den eneste forskjellen er at ε_0 og μ_0 er blitt erstattet av ε og μ. Det vil si at det finnes elektromagnetiske bølger også i stoff, men med hastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} < c. \tag{4.56}$$

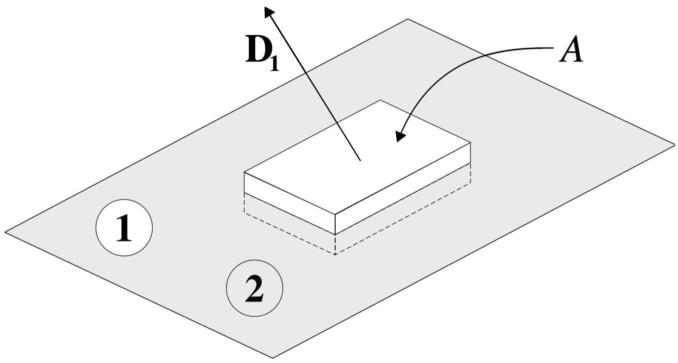
For de fleste medier holder $\mu_0 \approx \mu$ og $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Egenskapene ved elektromagnetiske bølger i stoff er de samme som i vakuum. Den eneste forskjellen er at $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ må erstattes med $v \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Det betyr at likning (4.32) må erstattes med

$$E = vB. \tag{4.57}$$

Grensebetingelser

Før vi kan se nærmere på hva som skjer med elektromagnetiske bølger i overgangen fra et medium til et annet, må vi vite hva slags grensebetingelser som gjelder. Vi skal finne dem med utgangspunkt i Maxwells likninger. Utfordringen blir å evaluere integralene på venstre side i de forskjellige likningene, siden vi må ta hensyn til at ε og μ har forskjellige verdier på hver side av grenseflaten. Målet er å ende opp med betingelser for både komponentene av feltene normalt på grenseflata ($E^{\perp}$ og $B^{\perp}$) og komponentene tangentielt til grenseflata ($E^{\parallel}$ og $B^{\parallel}$).



Figur 4.7: Gaussflate. Medium 1 ligger over den lysegrå grenseflaten, medium 2 ligger under.

Vi starter med Gauss' lov, likning (4.52). Gaussflaten vi skal jobbe med er boksen skissert i figur 4.7 – den er svært tynn, men arealet A på begge sider er endelig. Siden boksen er tynn, blir arealet på de vertikale veggene så lite at vi kan se bort fra bidragene fra komponentene av $\mathbf{E}$ parallelt med grenseflaten. Gauss' lov gir da betingelsen (husk at arealvektoren på undersiden peker nedover)

$$\oint_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_1 E_1^{\perp} A - \varepsilon_2 E_2^{\perp} A = 0,$$

som forenkler seg til

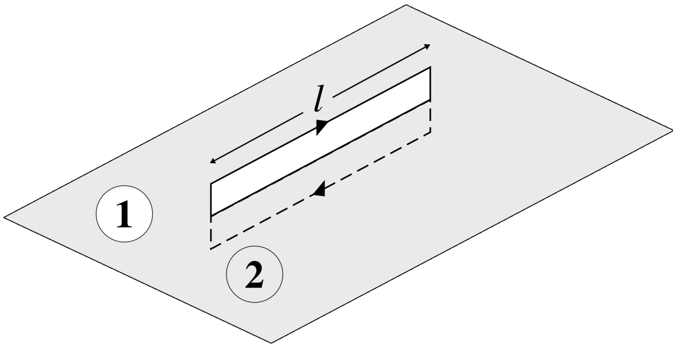
$$\varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0. \tag{4.58}$$

Gauss' lov for $\mathbf{B}$ er på nøyaktig samme form, så betingelsen for $\mathbf{B}$ blir den samme som for $\varepsilon\mathbf{E}$:

$$B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0 \tag{4.59}$$

Når vi skal se på Faradays lov (likning (4.54)), velger vi kurven C som vist i figur 4.8. Den delen av kurven som går normalt på grenseflaten er så kort at vi kan se bort fra bidraget fra feltet normalt på flaten. Da har vi

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1^{\parallel} l - E_2^{\parallel} l = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$



Figur 4.8: Amperevei. Medium 1 ligger over den lysegrå grenseflaten, medium 2 ligger under.

Siden den delen av kurven som står normalt på flaten er svært kort, er arealet av flaten som kurven er rand til veldig lite. Integralet på høyre side er derfor null. Betingelsen for $E^{\parallel}$ blir[7]

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0. \tag{4.60}$$

Resonnementet for Ampere-Maxwells lov, likning (4.55), følger nøyaktig samme metode som for Faradays lov. Betingelsene for $\frac{1}{\mu}\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$ må altså være like[8]:

$$\frac{1}{\mu_1}B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}B_2^{\parallel} = 0 \tag{4.61}$$

4.9 Refleksjon og transmisjon av elektromagnetiske bølger

Vi skal se nærmere på hva som skjer når elektromagnetiske bølger går fra et medium til et annet. Utgangspunktet vårt er grenseflatebetingelsene vi fant i forrige delkapittel. Vi skal begrense oss til plane bølger med forplantningsretning normalt på grenseflata.

Grenseflata vår ligger i xy-planet, og bølgen forplanter seg i positiv z-retning. Den innkommende bølgen er

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= E_{0_I}\cos(k_1 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_I &= B_{0_I}\cos(k_1 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \tag{4.62}$$

den reflekterte bølgen[9]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= E_{0_R}\cos(-k_1 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_R &= -B_{0_R}\cos(-k_1 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{4.63}$$

[7] Her kunne vi godt ha brukt vektornotasjon, slik at betingelsen blir $\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0$. Grunnen til det er at det ikke er noe spesielt med retningen på kurven i figur 4.8 – vi kunne like gjerne ha rotert kurven 90°, og resonnementet vårt hadde vært like godt. likningen vi kommer fram til gjelder altså for *alle* tangentialkomponenter av E.

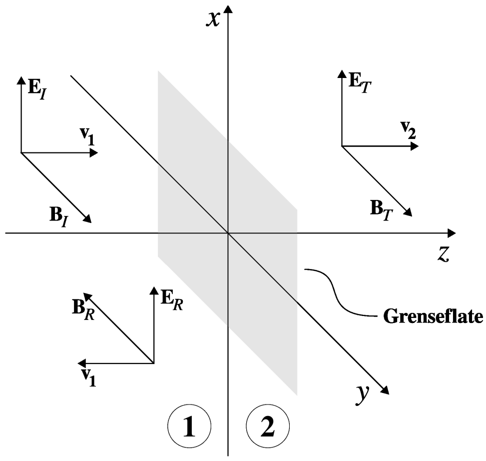
[8] Her gjelder det samme for $B^{\parallel}$ som ble sagt om $E^{\parallel}$ i fotnote 7.

[9] Det negative fortegnet til $\mathbf{B}$ skyldes kravet likning (4.31) stiller til retningen på feltene.

og den transmitterte bølgen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= E_{0_T}\cos(k_2 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{x}}\\ \mathbf{B}_T &= B_{0_T}\cos(k_2 z - \omega t)\,\hat{\mathbf{y}}.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Her har vi allerede gått ut ifra at frekvensen er den samme i begge mediene. Det er nødvendig for å bli kvitt tidsavhengigheten i grenseflata.



Figur 4.9

Grensebetingelsene er gitt av likningene (4.58) til (4.61). De to første, som setter krav til komponentene av feltene som står normalt på flata, er enkle å oppfylle: Vi vet allerede at bølgen er transversal, så når bølgen forplanter seg normalt på flata, er alle normalkomponentene null. De to siste betingelsene krever litt mer arbeid.

Likning (4.60) sier at tangentialkomponentene av $\mathbf{E}$ skal være kontinuerlige i grenseflata:

$$\begin{gathered}(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \mathbf{E}_T = 0\\ E_{0_I}\cos(k_1 z - \omega t) + E_{0_R}\cos(-k_1 z - \omega t) = E_{0_T}\cos(k_2 z - \omega t)\end{gathered}$$

Her kan vi stryke alle cosinusfaktorene, siden vi har $z = 0$ i grenseflata som sørger for at argumentene til alle cosinusene er det samme. Det gir den første betingelsen:

$$E_{0_I} + E_{0_R} = E_{0_T} \tag{4.65}$$

Likning (4.61) gir en betingelse for $B^{\|}$. Vi setter inn fra (4.57) for å få en betingelse på E isteden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1}B_{0_I} - \frac{1}{\mu_1}B_{0_R} &= \frac{1}{\mu_2}B_{0_T}\\ \frac{1}{\mu_1 v_1}E_{0_I} - \frac{1}{\mu_1 v_1}E_{0_R} &= \frac{1}{\mu_2 v_2}E_{0_T}\end{aligned}$$

$$E_{0_I} - E_{0_R} = \beta E_{0_T} \tag{4.66}$$

I siste linje har vi satt

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}. \tag{4.67}$$

Det eneste som gjenstår, er å løse likningene (4.65) og (4.66) for E_{0_R} og E_{0_T}. Det gir oss

$$\begin{aligned} E_{0_R} &= \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{0_I} \\ E_{0_T} &= \frac{2}{1+\beta} E_{0_I}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Vanligvis er $\mu \approx \mu_0$ en god tilnærming. Bruker vi den her, får vi $\beta = v_1/v_2$. Innsatt i uttrykkene for amplitudene til reflektert og transmittert bølge gir det

$$\begin{aligned} E_{0_R} &= \frac{1 - v_1/v_2}{1 + v_1/v_2} E_{0_I} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} E_{0_I} \\ E_{0_T} &= \frac{2}{1 + v_1/v_2} E_{0_I} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} E_{0_I}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Dette er faktisk nøyaktig de samme uttrykkene som gjelder for bølger på en streng.

Som for mekaniske bølger kan det være interessant å se på hvor mye av energien i bølgene som reflekteres og hvor mye som går igjennom grenseflata. Intensiteten til en harmonisk elektromagnetisk bølge i stoff er $I = \frac{1}{2}\varepsilon v E^2$. Vi uttrykker refleksjons- og transmisjonskoeffisientene ved brytningsindeksen $n = c/v$.

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0_R}}{E_{0_I}}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{4.70}$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0_T}}{E_{0_I}}\right)^2 \stackrel{\mu=\mu_0}{=} \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{4.71}$$

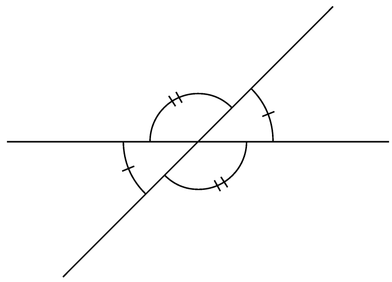
Her har vi satt $\mu = \mu_0$ underveis.

Det neste steget det er naturlig å ta nå, er å bruke grensebetingelsene vi allerede har på plass til å utlede brytningsloven, og samtidig finne hvor mye av bølgen som reflekteres og transmitteres. Selv om vi vet alt vi trenger å vite, skal vi la det være. Utregningene er ikke spesielt vanskelige, men de er ganske omfattende.

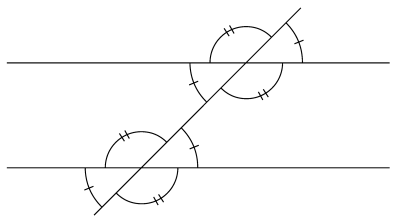
5 Optikk

5.1 Geometriske problemer

Dette delkapittelet tar opp en del grunnleggende geometriske sammenhenger, og gir tips til fremgangsmåter for å løse geometrioppgaver. Er man komfortabel med dette, kan man nøye seg med et lite blikk på figurene, men det er verdt å merke seg at det er essensielt å beherske geometri i dette faget. Toppvinkler, som vist i figur 5.1, er alltid like. For en linje som

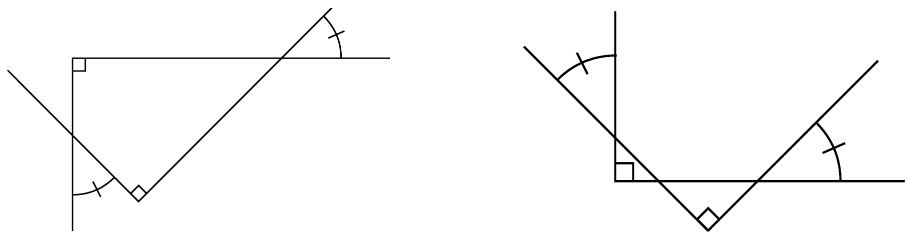


Figur 5.1: Toppvinkler.



Figur 5.2: Linje som skjærer to parallelle linjer.

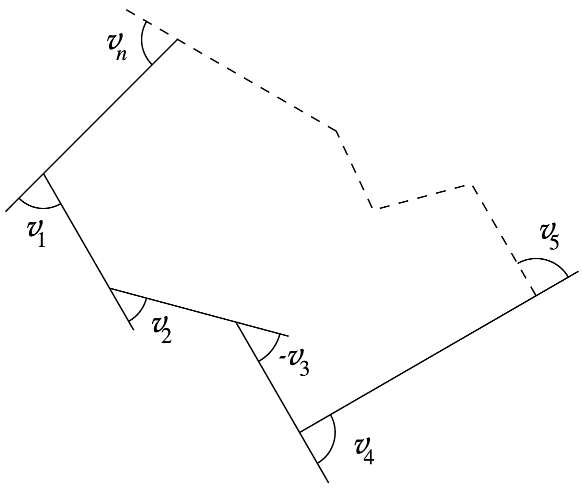
skjærer to parallelle linjer, har vi sammenhengen mellom vinklene som vist i figur 5.2. To vinkler, hvis vinkelbein står parvis vinkelrett på hverandre



(a) (b)

Figur 5.3: Vinkler med vinkelbein som står parvis vinkelrett på hverandre.

er like[1]. Som vi ser av figur 5.3, må man av og til tenke seg om for å se hvilke vinkler som er like. Denne regelen er lett å skjønne hvis man tenker over hva som skjer når man roterer to linjer med identiske vinkler, i samme rotasjonsretning; vinkelen mellom linjene vil åpenbart være den samme som før. Det som avgjør om vinklene i figur 5.3 står vinkelrett på hverandre, eller om summen av dem er π, er om de to vinkelbeina blir rotert i samme retning eller ikke.



Figur 5.4: Bevis for vinkelsummen av en n-kant.

Retningsendring

En ofte veldig nyttig fremgangsmåte i oppgaver som omhandler lysstråler som opplever ulike brytninger, er å se på retningsendringen til strålen. Trikset er å se på hvor mye strålens retning endrer seg i hver enkelt vinkel, for deretter å finne ut hvor mye retningen endrer seg totalt. Dette kan være en nyttig teknikk selv om det ikke er en fysisk stråle vi regner på. Følgende utledning av vinkelsummen i en n-kant gir et eksempel på hvordan man kan gå frem: hvis vi tenker oss at vi starter et sted på n-kanten, og går rundt n-kanten mens vi ser i den retningen vi går hele tiden, vil retningsendringen vi har opplevd når vi gått én runde være 2π. Vi har altså rotert én gang om vår egen akse når vi har gått rundt hele n-kanten. Navngir vi vinklene i n-kanten som i figur 5.4, har vi:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 2\pi.$$

[1]Her er det viktig at venstre vinkelbein i den ene vinkelen står vinkelrett på venstre vinkelbein i den andre, og at begge de høyre vinkelbeina står vinkelrett på hverandre.

Vi er ute etter summen av vinklene inni n-kanten, vi har:

$$vinkelsum = \sum_{i=1}^{n}(\pi - v_i) = (n-2)\pi. \tag{5.1}$$

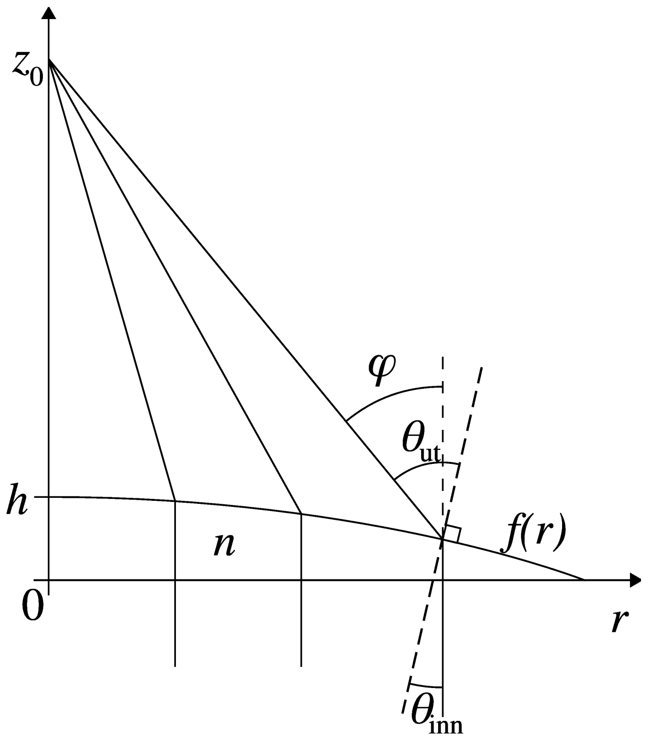
Vi har nå utledet en svært generell regel på en kortfattet måte som illustrerer anvendeligheten av retningsendring. Når det gjelder regelen om vinkelsum, bør alle være kjent med at vinkelsummen er π i en trekant, og 2π i en firkant, men man får sjelden bruk for denne regelen for $n > 4$. Vi tok den derfor med mest fordi utledningen er lærerik.

Tips til fremgangsmåte i geometrioppgaver

- Lag en stor, tydelig figur.
- Se etter hvilke vinkler som er like, og finn relevante vinkler ved å summere vinkler i trekanter og liknende. Se etter symmetrier.
- Bruk Snells lov og refleksjonsloven, eventuelt utnytt Huygens' eller Fermats prinsipp, som blir forklart i de neste delkapitlene.
- Undersøk om det finnes en kjent total retningsendring (eller om det er denne det spørres etter), summer i så fall retningsendringene.
- Forleng linjer slik at de møtes, og lag hjelpelinjer som fører til at du får rettvinklede eller likebeinte trekanter. Dette kan ofte gjøre det lettere å regne seg frem til vinkler.
- Sett opp sammenhengene du har funnet i et likningssett, og løs.

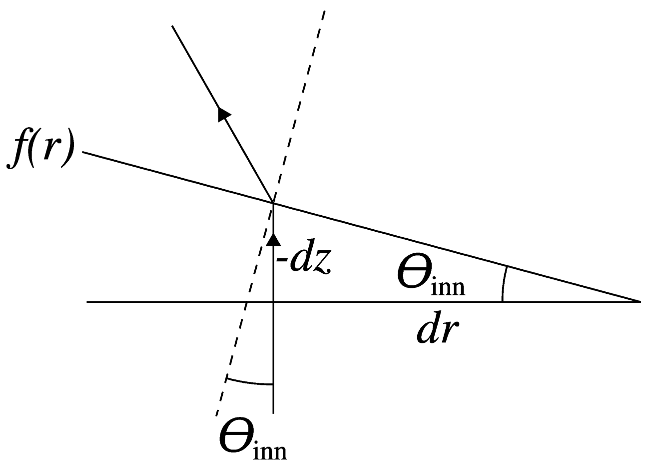
Eksempel 5.1: Svakt konveks linse

OBS! Dette er et langt og relativt vanskelig eksempel, kanskje mest for spesielt interesserte. Ei konveks linse er tykkere i sentrum enn ute i kantene, men hvor mye tykkere? Dette er så klart avhengig av hvor mye man ønsker at linsa skal forstørre, og av hvilken brytningsindeks n den har. Det er også avhengig av utstrekningen. Som vist i figur 5.5, plasserer vi linsa med sentrum i z-aksen, og lar stråler komme inn parallelt i positiv z-retning. Linsas radius er r_0, og den samler strålene i et punkt z_0 på z-aksen. Avstanden til linsas brennpunkt z_0 er mye større enn radien r_0. Strålene kommer inn langs innfallsloddet (i $z = 0$), men blir brutt på vei ut igjen. Linsas nederste kant er vannrett, mens den øvre kanten har en ukjent radiell form $f(r)$.



Figur 5.5: Lysgjennomgang i linse.

Vi vil først prøve å finne noen grunnleggende sammenhenger. Vis at strålenes innfallsvinkel er lik $-f'(r)$.



Figur 5.6: Hva er sammenhengen mellom θ_{inn} og $f(r)$?

Løsning: vi finner innfallsvinkelen θ_{inn} av figur 5.6:

$$\tan\theta_{inn} = \frac{dz}{dr} = -f'(r).$$

Når $z_0 >> r_0$ er θ_{inn} liten, så

$$\theta_{inn} = -f'(r).$$

Vis at retningsendringen til lysstrålene er $-(n-1)f'(r)$

Løsning: vi innfører innfallsvinkelen θ_{inn}, utgangsvinkelen θ_{ut}, og retningsendringsvinkelen ϕ, som vist i figur 5.5. Ved Snells lov er

$$n \cdot \sin\theta_{inn} = n_{luft} \cdot \sin\theta_{ut}$$

$$n \cdot \theta_{inn} = \theta_{ut}$$

for små vinkler θ_{inn} og θ_{ut}, og når vi tilnærmer brytningsindeksen for luft, n_{luft} til 1. Lysstrålene har dermed retningsendring ved utgangen fra linsa:

$$\phi = \theta_{ut} - \theta_{inn} = (n-1)\theta_{inn} = -(n-1)f'(r)$$

Vis at

$$\frac{r}{z_0 - f(r)} = -(n-1)f'(r)$$

og finn tykkelsen h i sentrum av linsa.

Løsning: det er rimelig greit å se at $\tan(\phi) = \frac{r}{z_0 - f(r)}$ om man lager seg en rettvinklet hjelpetrekant som i figur 5.5. Ved å huske på at retningsendringen må være liten siden $z_0 >> r_0$ er $\tan(\phi) = \phi$ og vi er i mål, $\frac{r}{z_0 - f(r)} = -(n-1)f'(r)$. Dette er en differensiallikning som kan løses slik:

$$\frac{-r}{z_0 - z} = (n-1) \cdot \frac{dz}{dr},$$

separerer likninga og integrerer over området på figur 5.5:

$$-\int_0^{r_0} r dr = (n-1)\int_h^0 (z_0 - z) dz,$$

$$-\frac{a^2}{2} = -(n-1)(z_0 h - \frac{h^2}{2}),$$

$$0 = \frac{h^2}{2} - z_0 h + \frac{a^2}{2(n-1)},$$

løser med hensyn på h:

$$h = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - \frac{a^2}{n-1}},$$

siden $h << z_0$ får vi bare én løsning:

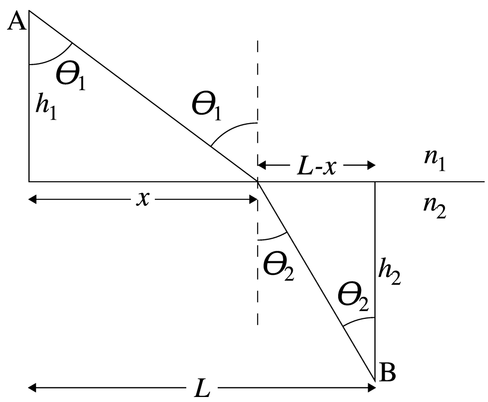
$$h = z_0 - \sqrt{z_0^2 - \frac{a^2}{n-1}}.$$

5.2 Fermats prinsipp

Oppførselen til elektromagnetiske bølger er fullt ut bestemt av Maxwells likninger, men disse er kompliserte, og i mange tilfeller er det lettere måter å finne ut hvordan lys og andre bølger brer seg. Fermats prinsipp og Huygens' prinsipp gjør det mye enklere å regne på og forstå hvordan lyset brer seg. Vi har sett spesielt på hvordan disse prinsippene kan brukes til å utlede refleksjonsloven og Snells brytningslov, fordi dette er gode eksempler på anvendelse av prinsippene.

Fermats prinsipp

En lysstråle følger den ruten mellom to punkter som tar kortest tid.



Figur 5.7: Utledning av Snells brytningslov ved hjelp av Fermats prinsipp.

Vi skal nå bruke Fermats prinsipp til å utlede Snells brytningslov. Figur 5.7 viser en lysstråle som blir brutt i en grenseflate mellom to medier med brytningsindekser n_1 og n_2. Brytningsindeksene er definert ved at hastigheten til lyset er $v_1 = c/n_1$ i medium 1, og $v_2 = c/n_2$ i medium 2. Fermats prinsipp tar utgangspunkt i tidsbruken, så vi setter opp tiden lyset bruker fra punkt A til punkt B, deriverer med hensyn på x, og setter lik null for å finne minimal tidsbruk:

$$t = \frac{n_1 \cdot \sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \frac{n_2 \cdot \sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}{c}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1 \cdot x}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{n_2 \cdot (L-x)}{c\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}} = 0$$

Vi ser av figuren at

$$\begin{aligned}\sin\theta_1 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}, \text{ og}\\ \sin\theta_2 &= \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}.\end{aligned}$$

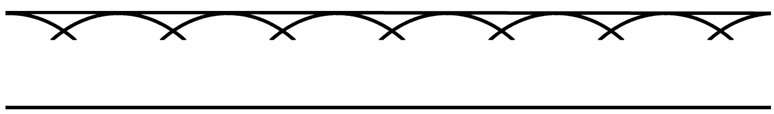
Vi får da

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{c}\sin\theta_1 &= \frac{n_2}{c}\sin\theta_2\\ n_1\sin\theta_1 &= n_2\sin\theta_2.\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3 Huygens' prinsipp

Huygens' prinsipp

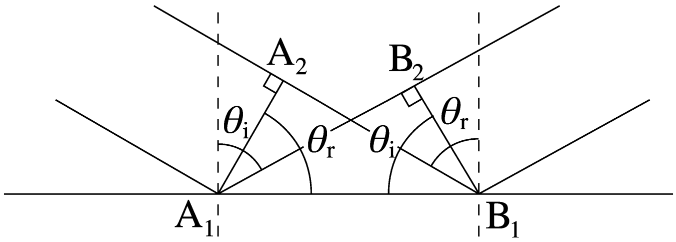
Hvert punkt på en bølgefront kan regnes som en kilde til "sekundære" bølger som sprer seg utover i alle retninger med hastighet lik primærbølgens hastighet. Bølgefronten til primærbølgen vil senere tangere alle de sekundære bølgene.



Figur 5.8: Illustrasjon av Huygens' prinsipp.

Alle resultater vi utleder med hjelp av Huygens' prinsipp, kan også utledes fra Maxwells likninger. Huygens' prinsipp er veldig illustrativt, og gir en god forståelse av hvordan bølger brer seg. Vi skal vise hvordan det kan brukes til å utlede refleksjonsloven og brytningsloven.

Figur 5.9 viser en bølge som blir reflektert i overgangen mellom to medier. Overbevis deg om at vinklene på figuren stemmer. A_1A_2 er bølgefronten før den blir reflektert, vi bruker så Huygens' prinsipp til å finne bølgefronten B_1B_2 etter refleksjonen. Siden bølgehastigheten her er den samme overalt, kan vi bruke passeren til å bestemme hvor bølgefronten kommer etter en tid.



Figur 5.9: Utledning av refleksjonsloven ved hjelp av Huygens' prinsipp.

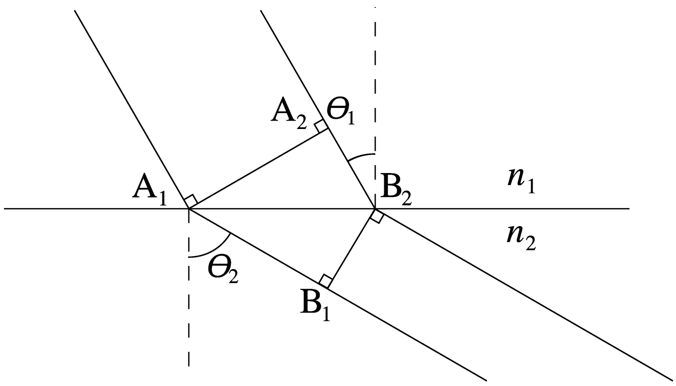
Dette gir oss at $A_1B_1 = A_2B_2 (= vt)$. Vi ser av figur 5.9 at

$$\sin\theta_r = \frac{A_1B_1}{A_1B_2}, \text{ og}$$
$$\sin\theta_i = \frac{A_2B_2}{A_1B_2}.$$

Siden $A_1B_1 = A_2B_2$ får vi

$$\sin\theta_r = \sin\theta_i,$$
$$\theta_i = \theta_r. \tag{5.3}$$

Når en bølge blir reflektert, er refleksjonsvinkelen lik innfallsvinkelen. Figur



Figur 5.10: Utledning av Snells brytningslov med Huygens' prinsipp.

5.10 viser en bølge som blir brutt i overgangen fra medium 1 til medium 2. Farten til bølgen er ulik i de to mediene, henholdsvis $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$. A_1A_2 er bølgefronten like før den passerer over i medium 2, B_1B_2 er bølgefronten like etter passeringen. Huygens' prinsipp bestemmer hvor langt bølgen flytter seg i det aktuelle mediet på en tid Δt. For de to delene av bølgen som vi undersøker, har vi $A_1B_1 = \Delta t \cdot v_2 = (\Delta t \cdot c)/n_2$ og $A_2B_2 =$

$\Delta t \cdot v_1 = (\Delta t \cdot c)/n_1$. Som i utledningen av refleksjonsloven bruker vi at bølgen propagerer rett frem når den ikke skifter medium, da må $\angle A_1B_1B_2$ og $\angle A_1A_2B_2$ være rette vinkler. Vi har nå av figur 5.10 at

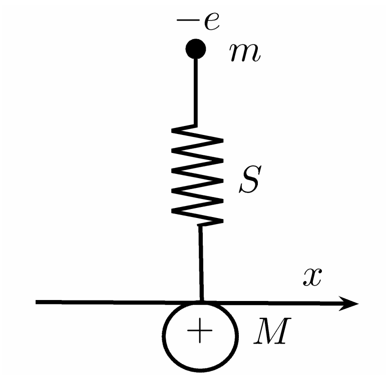
$$
\begin{aligned}
A_1B_2 = \frac{A_1B_1}{\sin\theta_2} &= \frac{A_2B_2}{\sin\theta_1} \\
\frac{\Delta t \cdot c}{n_2 \sin\theta_2} &= \frac{\Delta t \cdot c}{n_1 \sin\theta_1} \\
n_1 \sin\theta_1 &= n_2 \sin\theta_2,
\end{aligned}
$$

som er Snells brytningslov.

5.4 Regnbuen

Regnbuen er et interessant optisk fenomen som vi skal se litt nøyere på[2].

Dispersjon



Figur 5.11: Enkel molekylmodell.

Alle har i grunnskolen sett lys bli brutt gjennom et prisme, og at de ulike fargene blir brutt ulikt. Det som skjer er at de ulike frekvensene av lyset har forskjellige hastigheter inne i prismet, det er dette vi kaller dispersjon. Dermed får vi frekvensavhengige brytningsindekser $n = c/v$. Sammenhengen finner vi ved å se på vannets dielektriske egenskaper. En forenklet modell av et dielektrikum er vist i figur 5.11. En elektromagnetisk bølge virker som en ytre kraft som får elektronet til å svinge. Molekylmodellen vår har en resonansfrekvens[3] som bestemmer hvordan den reagerer på den påtrykte

[2]Se eksamen høsten 2006, oppgave 2 for en god oppgave knyttet til regnbuen.

[3]Vannmolekylene har flere resonansfrekvenser som kommer av at både elektronene og atomkjernene beveger seg i forhold til hverandre. Mer om dette i bl.a. TFY4215 Kjemisk fysikk og kvantemekanikk.

kraften. Vi får en tvungen svingning, med amplitude $A \sim E_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$ (se kapittelet om svingninger). Dette gir molekylet et indusert dipolmoment

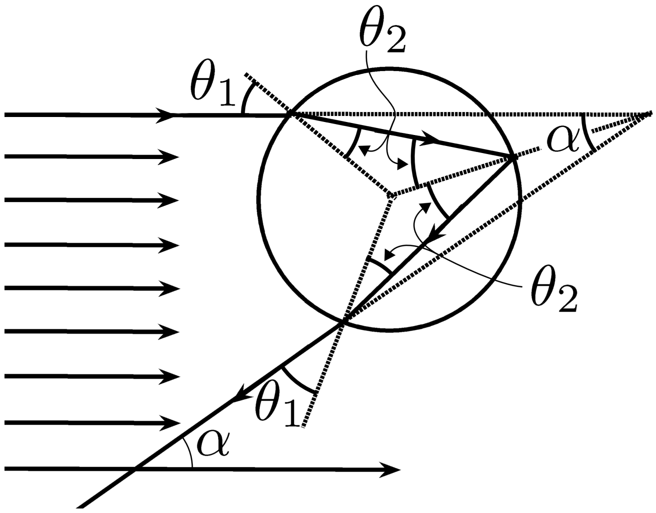
$$p = eA \sim \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Den elektriske polariseringen til dielektrikumet (som er dipolmoment per volumenhet) er dermed $P = \varepsilon_0 \chi_e E = E_0 K/(\omega_0^2 - \omega^2)$, der K er en proporsjonalitetskonstant. Vi ser nå på den elektriske forskyvningen:

$$\begin{aligned}
D &= \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \\
E &= \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{P}{\varepsilon_0} \\
&= E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \\
&= E_0 \left(1 - \frac{K}{\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \\
\frac{E_0}{\varepsilon_r} &= E_0 \left(1 - \frac{K}{\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \\
\varepsilon_r(\omega) = n^2(\omega) &\approx \left(1 - \frac{K}{\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)^{-1} \\
n(\omega) &\approx \left(1 - \frac{K}{\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Altså blir brytningsindeksen størst når frekvensen til de elektromagnetiske bølgene er nær en av resonansfrekvensene til vannmolekylene. For synlig lys er $\omega << \omega_0$. Av dette følger også at det lyset med høyest frekvens vil ha størst brytningsindeks. Det blå lyset, med bølgelengder rundt 400 nm, har høyere frekvens enn det røde lyset, med bølgelengder rundt 700 nm.

Mange tror at fallende regndråper har en fasong som likner på den de har når de henger, like før de faller ned fra en gjenstand. Dette er ikke riktig. På grunn av overflatespenningen til vannet, vil fallende regndråper ha form omtrent som ei kule. Luftmotstanden gjør at kuleformen riktignok bare er tilnærmet, men den duger til vårt formål. I figur 5.12 vises den lysgjennomgangen i en regndråpe som fører til den primære regnbuen. Lyset blir først brutt på vei inn i dråpen, deretter reflektert i bakkant, før den blir brutt på vei ut igjen av dråpen. Refleksjonsloven medfører at lysgjennomgangen er symmetrisk om linjen som deler vinkelen α på midten. La oss først se på det rent geometriske problemet med å bestemme α når θ_1 er kjent. Dette kan gjøres på flere måter, men mest konsistent med kapittelet om geometriske problemer er det om vi ser på retningsendringen til lysstrålen. Totalt må denne, av figur 5.12, være $\pi - \alpha$. Vi summerer ret-



Figur 5.12: Lysgjennomgang i regndråpe som gir den primære regnbuen.

ningsendringene:

$$\pi - \alpha = (\theta_1 - \theta_2) + (\pi - 2\theta_2) + (\theta_1 - \theta_2) = \pi + 2\theta_1 - 4\theta_2$$
$$\alpha = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 4 \arcsin\left(1/(n \sin\theta_1)\right) - 2\theta_1$$

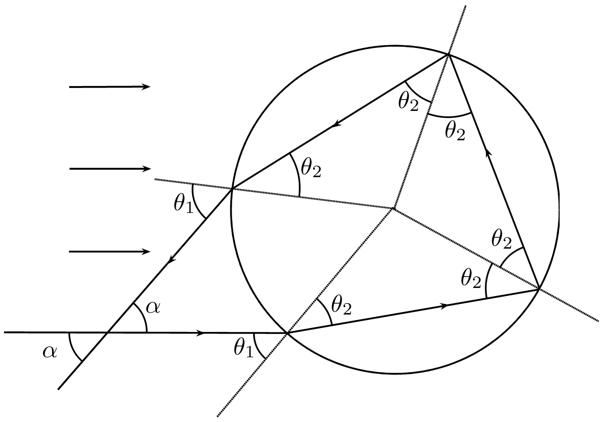
Her har vi brukt Snells lov for å finne θ_2 uttrykt ved θ_1. Vi skal ikke bruke tid på å regne ut hva α typisk er, men en sannsynliggjøring er på sin plass. Det kommer inn sollys med lik tetthet fra venstre på figur 5.12, men tettheten er ikke lik for alle θ_1. Mye av lyset kommer inn med $\theta_1 \approx 60°$. Når lyset kommer ut igjen av dråpen er det ganske samlet, med α litt i overkant av 40°. α er $40,8°$ for det fiolette lyset, og $42,5°$ for det røde lyset.

Hvor stor del av lyset følger akkurat denne banen gjennom dråpen? Omtrent 90% går inn i dråpen, bare 5% av dette blir reflektert i bakkant, 90% av dette igjen kommer ut i neste brytning. Dette fører til at det er refleksjonen som bestemmer polarisasjonen av lyset i regnbuen. Det er nemlig nesten bare lys polarisert normalt på innfallsplanet som blir reflektert i bakkant. Lyset i regnbuen er følgelig polarisert tangentielt til buen.

Regnbuen er selvsagt bare en del av en full sirkel, men man ser vanligvis bare en bue fordi man må ha en betydelig fri sikt for at lyset skal treffe et tilstrekkelig antall regndråper. Sentrum i regnbuen vil ligge med samme vinkel under horisonten som solen ligger over, mens vinkelen α bestemmer radius til buen.

Eksempel 5.2: Sekundær regnbue

Av og til kan man se en sekundær regnbue utenfor den primære. Fargene i den sekundære regnbuen er invertert i forhold til den primære, og den er mye svakere. Dette er fordi lysgjennomgangen som fører til den sekundære buen består av to refleksjoner inni dråpen, som begge slipper gjennom omtrent 5% av lyset. Figur 5.13 viser lysgjennomgangen som fører til den sekundære regnbuen. Hvordan er sammenhengen mellom innfallsvinkelen θ_1 og vinkelen α, der α bestemmer radius i den sekundære regnbuen, gitt brytningsindeksene n_2 til lyset i vann og n_1 i luft?



Figur 5.13: Lysgjennomgang som gir sekundær regnbue.

Løsning: Her har lyset fått en større retningsendring enn i den primære regnbuen. Retningsendringen er

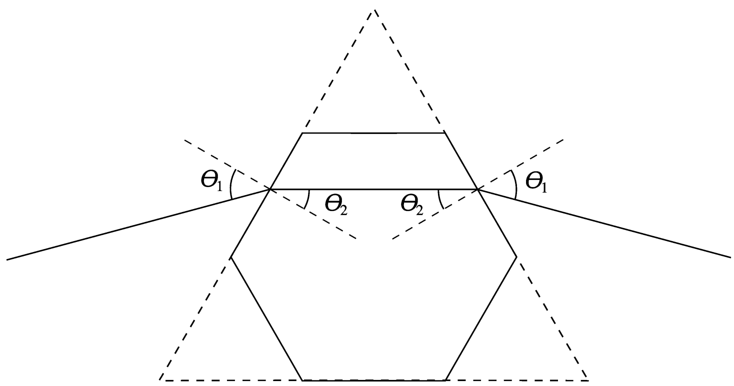
$$\pi + \alpha = 2(\theta_1 - \theta_2) + 2(\pi - 2\theta_2),$$
$$\alpha = \pi + 2\theta_1 - 6\theta_2.$$

Vi bruker Snells lov $\theta_2 = \arcsin \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$:

$$\alpha = \pi + 2\theta_1 - 6 \arcsin \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

Eksempel 5.3: Ring rundt månen

På klare vinternetter kan man av og til se en hvit ring rundt månen, noe som før i tiden var regnet som et sikkert tegn på at det var dårlig vær i vente. Ser man etter på gode bilder, kan man se at den innerste kanten av ringen er rødlig. Ringen er sterkest lengst inne, og blir gradvis svakere utover. Den karakteristiske ringen kan også av og til ses rundt solen. Denne gangen er det ikke lys gjennom regndråper som er årsaken, men lys som blir brutt gjennom heksagonale iskrystaller i høytliggende cirrusskyer. Disse skyene kommer gjerne et par dager før et lavtrykk, så måneringen kan faktisk signalisere et værskifte. Figur 5.14 viser den lysgjennomgangen i iskrystallene som fører til den minste, indre radiusen i ringen. Vi regner ikke ut hvor stor lysbrytningen er, for denne oppgaven er gitt i øvingsopplegget i faget. Bruk $n = 1,306$ så får du $21,54°$ for det røde lyset. Det blå lyset kommer omtrent en grad lenger ute.



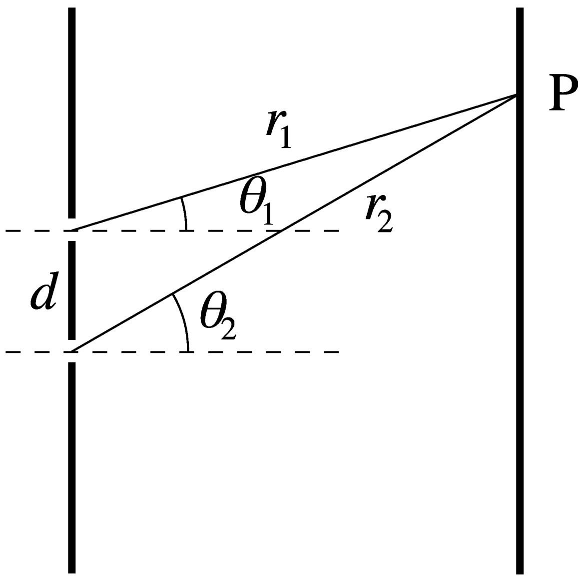
Figur 5.14: Lysgjennomgang som gir ring rundt månen eller solen.

5.5 Interferens

Siden bølgelikninga er lineær (bare inneholder ledd av første orden) og homogen, tillater den superposisjon av bølger. Det vil si at hvis $f_1(\mathbf{r}, t)$, $f_2(\mathbf{r}, t)$, ..., $f_n(\mathbf{r}, t)$ er løsninger av bølgelikninga, vil enhver lineærkombinasjon $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n$ av disse også løse bølgelikninga, uavhengig av formen til funksjonene. Interferens er når to eller flere fysiske bølger forplanter seg på samme sted, til samme tid, og vi får utslag som skriver seg tilbake til mer enn én bølge. I naturen er interferens lett å observere ved for eksempel å slippe to steiner i vann og se mønsteret bølgene lager. Har to bølger utslag i samme retning, snakker vi om *konstruktiv* interferens. Er utslagene motsatt rettet, har vi *destruktiv* interferens.

5.6 Diffraksjon

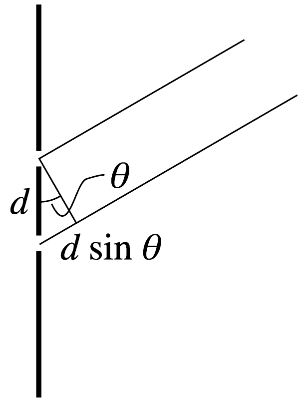
Diffraksjon er når *bølger blir bøyd rundt hindringer.* Vi vet at havbølger brer seg rundt øyer, og at lydbølger snor seg rundt gatehjørner, dog med en viss svekkelse. Graden av svekkelse er avhengig av bølgelengden. Dette går an å se på sjøen, der de lange havdønningene lettere kan runde hjørner enn bølger med kortere bølgelengde. Lys har bølgenatur, derfor blir også lyset bøyd når det passerer hindringer. Siden det synlige lyset har så mye kortere bølgelengde enn lydbølgene og havbølgene, er effekten mye svakere for lys. Likevel blir bøyningen av lyset betydelig hvis det går gjennom veldig små åpninger. Lager du en ørliten åpning mellom fingrene, og legger øyet inntil, ser åpningen veldig mye større ut enn det den er. Dette kommer av diffraksjon. Som vi skal se, er diffraksjonen størst når lyset går gjennom små åpninger. Vi skal først konsentrere oss om diffraksjon gjennom slike små åpninger, og gitre av mange små åpninger.



Figur 5.15: Tospalteeksperimentet.

Vi sender lys parallelt inn mot en plate med to smale spalter. Er spaltene smale nok, gir Huygens' prinsipp oss at lyset sprer seg som sirkelbølger ut fra den andre siden av platen. Plasserer vi en skjerm et stykke unna platen, vil vi få opp et mønster av lyse og mørke striper, som følge av interferens mellom lyset fra de to spaltene. Figur 5.15 viser hvordan vi kan finne lysmaksima på skjermen. Antar vi $d \ll L$, er $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, figur 5.16 gir oss $r_2 - r_1 = d \sin\theta$. Vi vet dermed at lysmaksima inntreffer når

$$d \sin\theta_n = n\lambda,$$



Figur 5.16: Lysutgang fra spaltene i tospalteeksperimentet.

der n er et heltall. Lysminima finnes tilsvarende ved

$$d \sin \theta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda.$$

Intensitetsfordeling ved diffraksjon fra to spalter

Vi skal nå se på intensiteten i punktet P. Vi finner først det elektriske feltet:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= E_0(\sin(kr_1 - \omega t) + \sin(kr_2 - \omega t)) \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) \sin\left(\frac{k(r_2 + r_1)}{2} - \omega t\right) \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos((\alpha - \beta)/2) \sin((\alpha + \beta)/2)$, og sett bort fra at E_0 avtar med stigende r for sylinderbølger. Intensiteten er:

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle \\ &= c\varepsilon_0 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) \langle \sin^2\left(\frac{k(r_2 + r_1)}{2} - \omega t\right) \rangle \\ &= 2c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) \\ &= 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Intensitetsfordeling ved diffraksjon fra mange spalter

Denne utledningen er i detalj ikke pensum, vi tar den med for å vise at den går an å gjøre. Som for to spalter finner vi først det elektriske feltet:

$$\begin{aligned}
E &= E_1 + E_2 + \ldots + E_N \\
&= E_0(\sin(kr_1 - \omega t) + \sin(kr_1 + kd\sin\theta - \omega t) + \\
&\quad \ldots + \sin(kr_1 + (N-1)kd\sin\theta - \omega t) \\
&= E_0 \,\mathrm{Im} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(kr_1 + jkd\sin\theta - \omega t)} \\
&= E_0 \,\mathrm{Im} \left\{ e^{i(kr_1 - \omega t)} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\underbrace{e^{ikd\sin\theta}}_{q} \right)^j \right\}
\end{aligned}$$

Nå bruker vi summeformelen for geometriske rekker,

$$\sum_{j=0}^{N-1} q = \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q}$$

(side 112 i Rottmann), med q valgt som i likninga over:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 \,\mathrm{Im} \left\{ e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{1 - \left(e^{ikd\sin\theta}\right)^N}{1 - e^{ikd\sin\theta}} \right\} \\
&= E_0 \,\mathrm{Im} \left\{ e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{1 - \left(e^{\frac{iNkd\sin\theta}{2}}\right)^2}{1 - \left(e^{\frac{ikd\sin\theta}{2}}\right)^2} \right\} \\
&= E_0 \,\mathrm{Im} \left\{ e^{i\left(kr_1 - \omega t + \frac{i(N-1)kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{e^{\frac{-iNkd\sin\theta}{2}} - e^{\frac{iNkd\sin\theta}{2}}}{e^{\frac{-ikd\sin\theta}{2}} - e^{\frac{ikd\sin\theta}{2}}} \right\}
\end{aligned}$$

Nå bruker vi sammenhengen mellom sinus og den komplekse eksponentialfunksjonen,

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(side 85 i Rottmann), som gir

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{iy} - e^{-iy}}.$$

Med henholdsvis $x = Nkd\sin\theta/2$ og $y = kd\sin\theta/2$, får vi

$$\begin{aligned}
E &= E_0 \,\mathrm{Im} \left\{ e^{i\left(kr_1 - \omega t + \frac{i(N-1)kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{\sin\frac{Nkd\sin\theta}{2}}{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}} \right\} \\
&= E_0 \frac{\sin\frac{Nkd\sin\theta}{2}}{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}} \sin\left(kr_1 - \omega t + \frac{(N-1)kd\sin\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Intensiteten blir:

$$
\begin{aligned}
I &\sim \langle E^2 \rangle, \\
I &= I_0 \{ \frac{\sin(\frac{Nkd}{2} \sin\theta)}{\sin(\frac{kd}{2} sin\theta)} \}^2 \\
&= I_0 \frac{\sin^2(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta)}{\sin^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta)}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Intensitetsfordeling ved diffraksjon fra en bred spalte

Vi tenker oss nå at en spalte med bredde a tilsvarer et diffraksjonsgitter med n spalter av bredde $a/N, N \to \infty$. Vi setter inn $d = a/N$ i likning (5.4).

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 [\frac{sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta}{sin \frac{\pi a}{N\lambda} \sin\theta}]^2 \\
&\approx I_0 [\frac{sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta}{\frac{\pi a}{N\lambda} \sin\theta}]^2 \\
&= I_0 N^2 [\frac{sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta}]^2
\end{aligned}
$$

I_0 er intensiteten som kommer fra en infinitesimal spalte, når $N \to \infty$ går I_0 mot 0 slik at $I(0) = N^2 I_0 =$ konst. Dette er lett å tenke seg til, for det elektriske feltet i retning $\theta = 0$ er proporsjonalt med antall spalter, $E \propto N$, og $I \propto E^2 \propto N^2$. Altså er intensitetsfordelingen fra en spalte

$$
I(\theta) = I(0) [\frac{\sin\beta}{\beta}]^2 , \qquad \beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta. \tag{5.5}
$$

6 Spesiell relativitetsteori

6.1 Hendelser og inertialsystemer

Hendelser

En *hendelse* er noe som skjer i en bestemt posisjon ved et bestemt tidspunkt. Et enkelt eksempel er en kanonkule skytes ut i en høyde h ved tiden $t = 0$. For å drive kvantitativ vitenskap er vi helt avhengig av å ha en entydig måte å referere til hendelser på. Erfaringsmessig er følgende nødvendig, men også tilstrekkelig:

- Posisjonen angis med tre koordinater i et referansesystem, det vil si et koordinatsystem *definert relativt til en bestemt referansehendelse.*
- Tidspunktet angis med en koordinat av en bestemt klokke. Nullpunktet til klokken må være definert samme referansehendelse som posisjonen.

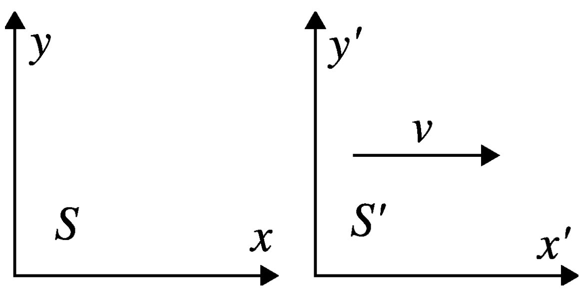
Uten referansehendelse gir de fire koordinatene ingen mening.

I denne sammenhengen kan vi stille to kritiske spørsmål. For det første: Hvilke koordinater vil observatører i forskjellige referansesystemer gi en og samme hendelse? For det andre: Hvordan er koordinatene i forskjellige referansesystemer relatert til hverandre? Den spesielle relativitetsteorien gir et oppsiktsvekkende og kontraintuitivt svar som vi skal se nærmere på her.

Inertialsystemer og andre systemer

Referansesystemer blir vanligvis klassifisert i to forskjellige grupper: Inertialsystemer og andre systemer (som ikke er inertialsystemer). Et *intertialsystem* er et referansesystem hvor Newtons 1. lov gjelder. Andre navn på inertialsystemer er treghetssystemer og galileiske systemer.

Den galileiske transformasjonen



Figur 6.1

I figur 6.1 beveger S' seg langs x-aksen til S med hastighet $\mathbf{v}$. De to referansesystemene har hver sin klokke. I det origo til S og S' faller sammen, stilles klokkene slik at $t = t' = 0$. Avstanden fra en vilkårlig hendelse A til origo i S' kan måles både fra S og S'. I utgangspunktet har vi *ikke* grunnlag for å anta at disse to målingene gir samme resultat. La derfor avstanden målt i fra S være d og avstanden målt i fra S' være d'. Da vil x-koordinaten til A være $x_A = d + vt$. Før Einstein antok man at[1] $d' = d$. x'-koordinaten til A vil da være gitt ved $x'_A = x_A - vt$. Dette gjelder for alle hendelser. Videre antok man at $t = t'$. Dette er *den galileiske transformasjonen*.

Den galileiske transformasjonen

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \tag{6.1}$$

Den galileiske transformasjonen er en mulig oppskrift på hvordan koordinater i forskjellige referansesystemer er relatert. Dette er sikkert ikke nytt. Vi har likevel tatt den med her for å vise hvordan den står i forhold til resultatetene av den spesielle relativitetsteorien.

6.2 Michelson-Morleyeksperimentet

Utgangspunktet: Forestillingen om en eter

I 1861 fullførte Maxwell sitt arbeid med å samle elektromagnetismen og optikken i én, fullstendig teori. Der inngikk det at lyset hadde en endelig hastighet som i vakuum var lik c.

På 1800-tallet var den rådende oppfatningen at lys var en bølge som forplantet seg i et særegent medium kalt "eteren". Eteren fylte hele universet og ble antatt å være i ro. Eteren gjaldt derfor som det absolutte "referanselegeme" i elektromagnetismen, slik at lyset forplantet seg med hastighet c relativt til *eteren*.

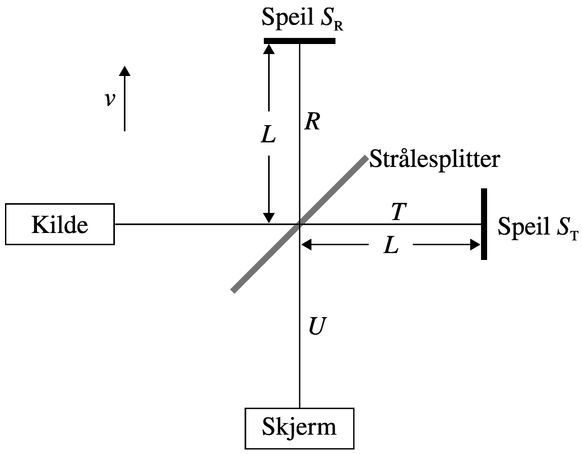
Michelson og Morley utførte i 1887 et eksperiment for å kartlegge Jordens bevegelse relativt eteren. På den måten skulle de teste hypotesen om at eteren var i ro. Her skisseres eksperimentet i grove trekk (merk at vi ikke bruker relativitetsteorien her, da den ikke ble kjent før i 1905).

Hovedtrekkene ved eksperimentet

La eterens hastighet relativt Jorden være $\mathbf{v}$, se figur 6.2 (Jorden antas å bevege seg tilnærmet lineært). La en koherent[2] lyskilde sende ut en lysstråle.

[1] Antagelsen var mer eller mindre ubevisst.

[2] En lyskilde er koherent når alt lyset den sender ut er *i fase*.



Figur 6.2: Oppsett i Michelson-Morleyeksperimentet.

Tabell 3: Størrelser i Michelson-Morleyeksperimentet (tilnærmet).

Lyshastigheten relativt til eteren	$c = 3 \times 10^8$ m/s
Eterens forventede hastighet relativt jorda (minimum)	$v = 3 \times 10^4$ m/s
Lengdene for den splitta strålen (se figur 6.2)	$L = 11$ m
Bølgelengde for laserlyset	$\lambda = 500$ nm

En strålesplitter deler strålen i en stråle T og en stråle R. Både R og T treffer så hvert sitt speil S_R og S_T, hvorpå de reflekteres og igjen treffer strålesplitteren. Her samles strålene igjen, og den samlede strålen U lager et interferensmønster på en skjerm.

Tiden strålen R bruker fra strålesplitteren til speil S_T og tilbake er

$$t_R = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})}, \tag{6.2}$$

siden lyset har "medvind" (hastighet $c + v$) på vei til S_R og "motvind" (hastighet $c - v$) på vei tilbake. Dette gir at tilbakelagt strekning for R relativt eteren er

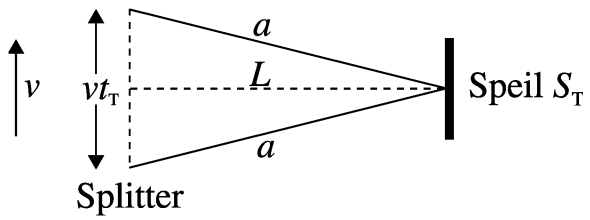
$$d_R = \frac{2L}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 2L(1 + \frac{v^2}{c^2}). \tag{6.3}$$

Tiden strålen T bruker fra strålesplitteren til speil S_T og tilbake er gitt ved

$$c^2 t_T^2 = (2L)^2 + v^2 t_T^2\,,$$

der vi altså har brukt Pythagoras' teorem (se figur 6.3). Løser vi for t_R, får vi

$$\Rightarrow \qquad t_T = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{6.4}$$



Figur 6.3

Da er tilbakelagt strekning for T relativt eteren

$$d_T = \frac{2L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 2L(1+\frac{v^2}{2c^2}). \tag{6.5}$$

Differansen i tilbakelagt strekning for de to strålene blir

$$d_R - d_T = \Delta d \approx L\frac{v^2}{c^2}. \tag{6.6}$$

Vi ser altså at stråle T vil tilbakelegge en mindre strekning enn strålen R. Det vil derfor generelt være en viss faseforskjell $\Delta\phi$ mellom de to strålene når de møtes i strålesplitteren. Faseforskjellen er

$$\Delta\phi = k\Delta d \approx \frac{2\pi L v^2}{\lambda c^2}. \tag{6.7}$$

For å veie opp for unøyaktigheter i apparaturen, utføres eksperimentet først en gang, før hele apparaturen snus 90°. Da er rollene til d_R og d_T byttet om, og faseforskjellen apparaturen viser før og etter vi snur apparatet er den dobbelte av den vi beregnet i likning (6.7):

$$\Delta\phi = \frac{4\pi L v^2}{\lambda c^2} \tag{6.8}$$

Det er likevel en viktig forskjell mellom resulatet vi måler nå og det forrige: Dette resultatet påvirkes i svært liten grad av unøyaktigheter ved apparaturen – de unøyaktighetene korrigeres for siden vi tar differansen mellom to målinger. Innsatt tallverdier fra tabell 3 får vi en forventet faseforskjell

$$\Delta\phi = 2\pi \times 0.4\,. \tag{6.9}$$

Det eksperimentelle resultatet avvek kraftig fra det forventede. Michelson og Morley målte en faseforskjell

$$\Delta\phi < 2\pi \times 0.01\,. \tag{6.10}$$

Resultat og kommentarer

Resultatet var uventet: Michelson og Morley fant en forskyvning av fasen som var mye mindre enn en tjuendedel av den forventede forskyvningen. Først diskuterte man muligheten at eteren ble dratt med Jorden slik at den lokale hastigheten relativt Jorden var liten. Resultatet anses derimot i dag som negativt: hvis det eksisterer en eter så beveger den seg ikke i forhold til Jorden. Merk at det negative utfallet *ikke* beviser at lysets hastighet i vakuum er c i alle inertialsystemer.

6.3 Einsteins to postulater

Einsteins postulater

1. Det spesielle relativitetsprinsippet: Alle fysikkens lover har samme form i alle inertialsystemer.
2. Lysets hastighet i vakuum er c i alle inertialsystemer.

Ved hjelp av disse to postulatene utledet Einstein hele den spesielle relativitetsteorien.

Einsteins 1. postulat

Ikke noe mekanisk eksperiment kan avgjøre om det referansesystemet eksperimentet blir beskrevet relativt til er i ro eller i rettlinjet, uniform bevegelse. Da er det også naturlig å kreve at mekanikkens lover skal speile dette, det vil si at alle mekanikkens lover har samme form i alle inertialsystemer. Dette er *det galileiske relativitetsprinsippet.*

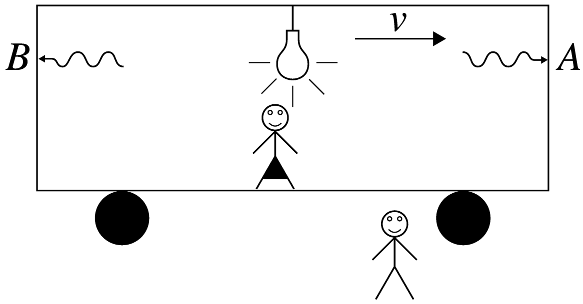
Einstein innså at heller ikke noe elektrodynamisk eksperiment kan skille mellom rettlinjet uniform bevegelse og “ro”. Dette sto i skarp motsetning til oppfatningen om at eteren var det absolutte referanselegemet. Derfor utvidet han det galileiske relativitetsprinsippet til å omfatte alle fysikkens lover.

Einsteins 2. postulat

Det negative resultatet av Michelson og Morley eksperimentet medførte et forklaringsproblem angående Jordens bevegelse i universet. Einstein løste dette ved å forlate forestillingen om en eter, og heller postulere at lysets hastighet i vakuum er lik i alle inertialsystemer.

I fortsettelsen skal vi utlede konsekvensene av disse postulatene.

6.4 Samtidighet



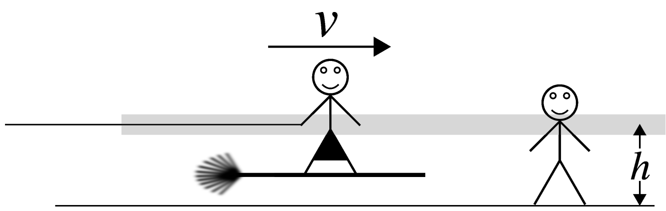
Figur 6.4: Illustrasjon av samtidighet.

Kari kjører tog med stor hastighet, og Ola står utenfor og ser på. Ved et bestemt tidspunkt slås lampen i vognen på. La hendelsen at lyset treffer fremre vegg være A, og at den treffer bakre vegg være B. Siden lampen henger midt i vognen, vil Kari måle at de to hendelsene er samtidige.

Men hva måler Ola? Etter at lampen slås på beveger vognen seg fremover. Dermed er avstanden fra lampens opprinnelige posisjon til fremre vegg blitt lengre, mens avstanden til bakre vegg er blitt kortere. Siden lyset også beveger seg med hastighet c i Ola sitt referansesystem, vil han måle at B inntreffer før A.

Dette forteller oss at hendelser som er samtidige i et referansesystem ikke nødvendigvis er samtidige i et annet. Det faktum at samtidighet er relativt kan brukes som verktøy til å analysere mange situasjoner og til å løse en del paradokser som oppstår som konsekvenser av relativitetsteorien. I avsnitt 6.8 innføres det matematiske apparatet som trengs for å gjøre dette.

6.5 Måling av lengder normalt på fartsretningen



Figur 6.5

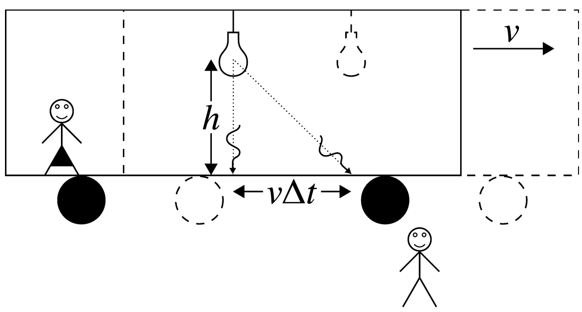
Ola har malt en grå strek på veggen en høyde h over bakken målt i hans referansesystem (se figur 6.5). Senere flyr Kari rundt på sopelimen sin i stor hastighet med en målestav og en sprayboks med svart maling. Hun sjekker hele tiden at sprayboksen alltid er en høyde h over bakken. Når hun passerer veggen, setter hun en strek på den med sprayboksen. Hvor står strekene i forhold til hverandre?

Både Ola og Kari er i inertialsystemer. Vi ser først på situasjonen fra Olas synspunkt. Han ser Kari komme mot seg med hastighet v. La oss anta at Karis måling av høyde påvirkes av hastigheten hennes, slik at hun setter streken sin en høyde Δh høyere opp enn Ola.

Så ser vi det hele fra Karis synspunkt. Hun ser Ola komme mot seg med hastighet v. Vi må anta at siden Ola beveger seg relativt til Kari, så må han sette streken sin en høyde Δh for høyt (dette er nøyaktig det samme vi antok om Kari når vi så situasjonen fra Olas synspunkt.

Oppsummert sier de to avsnittene over at Kari setter streken sin Δh høyere opp enn Ola, og Ola setter streken sin en høyde Δh høyere enn Kari. Det er bare en Δh som sørger for at begge ser det samme når de går tilbake til veggen sammen og sjekker hvordan den ser ut: Vi må ha $\Delta h = 0$. Lengder normalt på fartsretningen er like lange uavhengig av hvilket referansesystem man måler dem i.

6.6 Tidsdilatasjon



Figur 6.6: Lysets tilbakelagte strekning er forskjellig sett fra Kari og Ola sine referansesystemer.

Vi ser på situasjonen i figur 6.6, der Kari igjen kjører tog med Ola som tilskuer. La hendelse A være at lyset skrus på, og la hendelse B være at lyset treffer gulvet rett nedenfor lampen. Da vil Kari måle at tidsintervallet mellom hendelsene er

$$\Delta\tau = \frac{h}{c}\,. \tag{6.11}$$

Ola, derimot, vil se at lysstrålen beveger seg på skrå. Ifølge Einsteins 2. postulat, vil også han måle at lyset har hastighet c. Derfor vil Ola måle et tidsintervall (Ola måler også høyden til å være h siden lengden står normalt på fartsretningen)

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{h^2 + v^2 \Delta t'^2}}{c}\,. \tag{6.12}$$

Hvis man løser denne likninga med hensyn på $\Delta t'$ og sammenligner med likning (6.11), får vi at

$$\Delta t' = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{6.13}$$

$\Delta\tau$ kalles *egentiden*, og er tidsintervallet i det referansesystemet der observatøren er i ro relativt hendelsene. Vi innfører

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,, \tag{6.14}$$

som kalles Lorentzfaktoren. Da kan uttrykket (6.13) skrives

$$\Delta t' = \gamma \Delta\tau \,. \tag{6.15}$$

Eksempel 6.1: Klokker i relativ bevegelse

Ola og Per farer forbi hverandre i hvert sitt inertialsystem, med hver sin klokke.

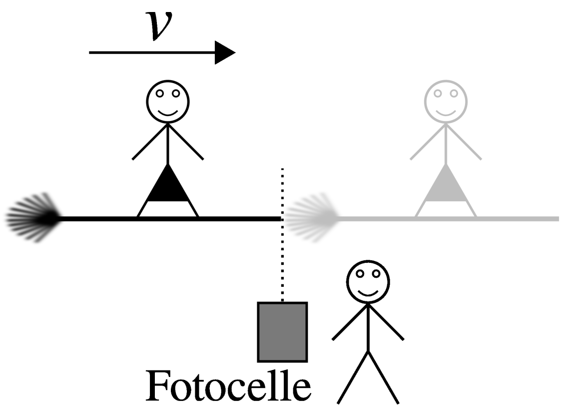
1. For hvert sekund som går på Ola sin klokke, vil Per måle at det går γ sekunder. Altså vil Per si at Ola sin klokke går langsomt.
2. For hvert sekund som går på Per sin klokke, vil Ola måle at det går γ sekunder. Altså vil Ola si at Per sin klokke går langsomt.

Her er det ingen motsigelse, selv om det kan se slik ut. Problemet er at Ola og Per egentlig måler forskjellige ting. De to hendelsene i tilfelle 1 er at klokken *til Ola* viser to tidspunkt, mens de to hendelsene i tilfelle 2 er at klokken *til Per* viser to tidspunkt. Altså måles tidsintervallet mellom *forskjellige* hendelsespar i de to tilfellene. Dette tillater at både Per og Ola har rett samtidig uten at det er noen motsigelse.

6.7 Lengdekontrasjon

Kari flyr på sopelime i hastighet v, og måler lengden av den til å være l' med en tommestokk. Ola står på bakken, og vil også måle lengden av sopelimen. Han setter opp en fotocelle og tar tiden Δt fra fremfre ende av sopelimen passerer fotocellen (hendelse A) til bakre ende av sopelimen passerer fotocellen (hendelse B). Da vil Ola beregne en lengde

$$l = v\Delta t \,. \tag{6.16}$$



Figur 6.7: Kari og Ola måler forskjellig lengde av sopelimen.

Kari vil beregne en tid

$$\Delta t' = \frac{l'}{v} \tag{6.17}$$

mellom hendelse A og B. Hun befinner seg i det referansesystemet der sopelimen er i ro, så hvis man er litt for kjapp ville man si at hun måler egentiden. Problemet er at de to hendelsene ikke skjer på samme sted i Kari sitt referansesystem. Det gjør de derimiot i Ola sitt referansesystem, så det er Ola som måler egentiden. Med $\Delta\tau = \Delta t$ gir likning (6.15) at

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t' \,. \tag{6.18}$$

Innsetting i likning (6.16) og sammenligning med likning (6.17) gir da at

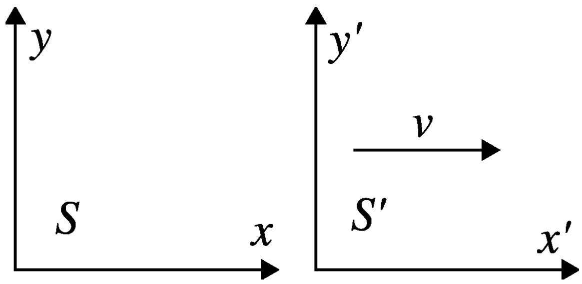
$$l = \frac{l'}{\gamma}. \tag{6.19}$$

Ola vil måle at sopelimen er kortere enn det Kari måler, og i grensen $v \to c$ vil Ola måle en lengde $l = 0$. Generelt gjelder at en observatør i bevegelse relativt et måleobjekt måler en kortere lengde enn en observatør som er i ro relativt måleobjektet. Lengden som *Kari* måler blir kalt for *egenlengden*, ettersom hun er i ro relativt måleobjektet.

6.8 Lorentztransformasjonen

Lorentztransformasjonen erstatter den galileiske transformasjonen, i det den tar hensyn til Einsteins 2. postulat. Her utleder vi den ut ifra det vi vet om tidsdilatasjon og lengdekontraksjon[3].

[3] Det er også mulig å utlede Lorentztransformasjonen uten først å ha studert tidsdilatasjon og lengdekontraksjon, og heller utlede tidsdilatasjon og lengdekontraksjon som konsekvens av Lorentztransformasjonen.



Figur 6.8: To referansesystemer i relativ bevegelse.

Figur 6.8 viser nøyaktig samme situasjon som figur 6.1 i avsnitt 6.1. Også her beveger S' seg langs x-aksen til S med hastighet $\mathbf{v}$. De to referansesystemene har hver sin klokke. I det origo til S og S' faller sammen, stilles klokkene slik at $t = t' = 0$. Avstanden en vilkårlig hendelse A til origo i S' er d' målt fra S', mens den er d målt fra S. Da vil $x_A = d + vt$. Forskjellen fra utledningen av den galileiske transformasjonener, er at vi ikke lenger kan anta at $d = d'$. Tvert i mot, likning (6.19) gir at

$$d = \frac{1}{\gamma} d \,. \tag{6.20}$$

Det medfører at

$$x' = \gamma(x - vt) \,. \tag{6.21}$$

Tilsvarende får vi at koordinaten x målt i fra S er

$$x = \gamma(x' + vt') \,. \tag{6.22}$$

Hvis vi setter inn likning (6.21) i likning (6.22), finner vi etter litt rydding følgende likning for hvordan tiden transformeres:

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x) \,. \tag{6.23}$$

Vi har allerede argumentert for at lengder normalt på fartsretningen ikke endrer seg i avsnitt 6.5.

Lorentztransformasjonen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2} x). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Eksempel 6.2: Tvillingparadokset

I eksempel 6.1 så vi på to klokker i relativ bevegelse, og hvordan de begge målte at den andre klokken gikk langsommere. I forlengelse av dette setter vi opp et nytt tankeeksperiment.

Ola og Per er tvillinger. Ola blir på Jorden (som vi betrakter som et inertialsystem S), mens Per reiser til en stjerne. La Per sitt referansesystem være S'.

1. Per forlater Jorden i et romskip, med hastighet $v\hat{\mathbf{x}}$ relativt S.
2. Per når reisemålet sitt og snur.
3. Per kommer tilbake til Jorden.

Når Per starter, snur og stopper antar vi at hastighetsendringen skjer momentant, med stor akselerasjon. Hvem er eldst når de møtes igjen?

Når Per kommer tilbake, har Ola hele tiden vært i bevegelse relativt til han med hastighet v. Per mener derfor at tida har gått saktere hos Ola, og at Ola er yngst. På akkurat samme måte argumenterer Ola for at Per er yngst.

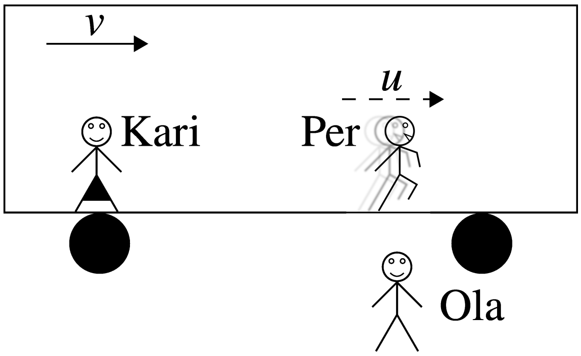
Forskjellen på Per og Ola er at Per er akselerert mens Ola stadig er i et inertialsystem. Både Per og Ola er enige om hvem som har akselerert/snudd, ettersom det finnes enkle fysiske eksperimenter som kan avgjøre om et referansesystem er akselerert eller ikke (tenk bare på en masse opphengt i en snor). Ola er derfor den som har rett: Per er yngst.

6.9 Addisjon av hastigheter

La Per løpe inne i vognen til Kari med fart $u = \frac{dx'}{dt'}$, og la vognen bevege seg med fart v relativt Ola som står utenfor. Vi lurer nå på hvilken fart $w = \frac{dx}{dt}$ Ola vil måle at Per løper med. Etter det vi har sett forstår vi at dette ikke kan være så enkelt som $w = u + v$.

Her må vi holde tungen beint i munnen for å ha klart for oss hva som er relativt hva. Vi ønsker å uttrykke $w = \frac{dx}{dt}$ ved u og v. For å gjøre dette finner vi først hvilken fart Kari vil måle at Per har ved å Lorentztransformere teller og nevner for seg:

$$
\begin{aligned}
u = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} \\
&= \frac{w - v}{1 - \frac{vw}{c^2}} \qquad (6.25)
\end{aligned}
$$



Figur 6.9

Her har vi delt alle ledd på dt i andre steg. Hvis vi nå løser denne likninga for w får vi

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{6.26}$$

Likning (6.26) angir farten Ola måler at Per har.

Eksempel 6.3: Bevaring av impuls

La to partikler med masse m og hastigheter v_1 og v_2 langs x-aksen i et system S kollidere fullstendig uelastisk. Loven om bevaring av impuls i klassisk mekanikk gir oss da at den nye partikkelen med masse $2m$ vil ha en hastighet

$$v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \tag{6.27}$$

Vi ser på samme eksperiment fra et system S' som beveger seg med hastighet u langs x-aksen til S. Da vil, etter likning (6.25),

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1 - u}{1 - \frac{v_1 u}{c^2}} \\ v_2' &= \frac{v_2 - u}{1 - \frac{v_2 u}{c^2}} \\ v_3' &= \frac{v_3 - u}{1 - \frac{v_3 u}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2}(v_1 + v_2) - u}{1 - \frac{\frac{1}{2}(v_1+v_2)u}{c^2}}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Legg merke til at loven om bevaring av impuls, slik vi kjenner størrelsen i klassisk mekanikk, ikke gjelder i S', ettersom $v_3' \neq (v_1' + v_2')/2$. Dette skal vi se nærmere på i avsnitt 6.10.

6.10 Impuls, kraft og energi

Bevaring av impuls er en av de grunnleggende lovene i fysikken. Denne loven bør derfor formuleres slik at den er gyldig i alle referansesystemer. I eksempel 6.3 så vi at dette ikke var tilfellet for impuls slik vi kjenner størrelsen fra klassisk mekanikk.

Problemet løses ved å innføre *egenhastigheten*

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \gamma \mathbf{v}\,, \tag{6.29}$$

der posisjonen $\mathbf{r}$ måles i observatørens eget referansesystem, men deriveres med hensyn på egentiden[4].

Eksempel 6.4: Fysisk tolkning av egenhastigheten

Per har flydd hjem til Bergen fra Trondheim, og vil finne snitthastigheten flyet hadde mellom takeoff og landing. Han er kjent med avstanden mellom de to byene målt fra Jordens overflate, men tok tiden på en klokke han hadde med seg. Den snitthastigheten han da finner er egenhastigheten. Ola tok derimot tiden med utstyr montert på Jorden. Da vil han måle "alminnelig" hastighet.

Relativistisk impuls

Ved innføring av egenhastighet får vi nå et uttrykk for impuls:

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\eta} = \gamma m \mathbf{v}. \tag{6.30}$$

Vi ser at impulsen går mot uendelig når $v \to c$.

Ny definisjon av impuls får konsekvenser for både kraft og energi. Newtons 2. lov gjelder fortsatt, men kun på formen[5]

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}. \tag{6.31}$$

[4] For å måle egentiden måler man bare tidsintervallet i sitt eget inertialsystem, og kalkulerer egentiden ved hjelp av likning (6.15). Alle observatører i alle inertialsystemer vil være enige om hvor stor egentiden er. For å beregne hvilken egenhastighet en observatør i et annet inertialsystem vil måle, trenger man derfor bare å Lorentztransformere "$d\mathbf{r}$"-en. Dermed vil egenhastigheten transformeres lineært, hvilket er grunnen til at egenhastigheten gir bevaring av impuls.

[5] Hvis man utfører derivasjonen finner man at kraften generelt *ikke* er parallell med akselerasjonen (sammenlign med $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$). Denne effekten kan utledes for ladninger ved hjelp av Maxwells likninger, men den gjelder altså generelt.

Relativistisk kinetisk energi

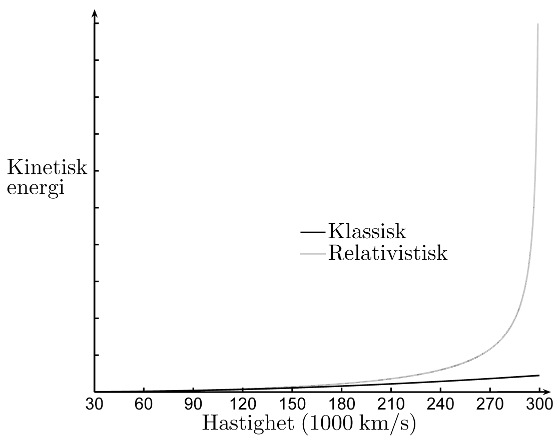
Kinetisk energi er definert som det arbeidet gjort på en partikkel med masse m for å bringe det opp i en hastighet $\mathbf{v}$. Med den nye impulsen blir dette:

$$\begin{aligned}
K &= \int_{s_0}^{s_1} d\mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \int_0^p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} \\
&= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \int_0^v \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v} && \text{ved delvis integrasjon} \\
&= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \int_0^v \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv \\
&= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{2} \int_0^u \frac{mc^2}{\sqrt{1-u}} du && \text{ved substitusjon } u = v^2/c^2 \\
&= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mc^2
\end{aligned}$$

og ved innsetting av likning (6.30) og litt rydding får vi at

$$K = mc^2(\gamma - 1). \tag{6.32}$$

Som forventet er kinetisk energi lik null når farten er null ($v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$).



Figur 6.10: Plott av relativistisk og klassisk kinetisk energi.

Relativistisk totalenergi

Relativistisk totalenergi defineres som:

$$E_{tot} = \gamma mc^2 \tag{6.33}$$

Likning (6.33) medfører at et legeme med masse m har en energi

$$E_0 = mc^2, \tag{6.34}$$

selv om partikkelen er i ro og ikke befinner seg i et potensial. Denne energien kalles *hvileenergien* til partikkelen. I 1905 utledet Einstein at en partikkel i ro med masse m virkelig har et energiinnhold lik mc^2. Det innebærer at masse egentlig er et mål for energien til et partikkel. Videre innebærer begrepet hvileenergi at masse kan gå over i energi og motsatt, og derfor at bevaring av masse ikke lenger gjelder som naturlov. Derimot gjelder fortsatt at energien er bevart.

Til slutt presenteres et uttrykk som viser hvordan energi består av to deler, en som er relatert til impuls og en som er relatert til masse:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{6.35}$$

Dette kan for eksempel utledes som følger:

$$\begin{aligned} c^2p^2 &= \gamma^2 m^2 \frac{v^2}{c^2} c^4 = \gamma^2 (1 - (1 - \frac{v^2}{c^2})) m^2 c^4 \\ &= E^2 - m^2c^4 \end{aligned}$$

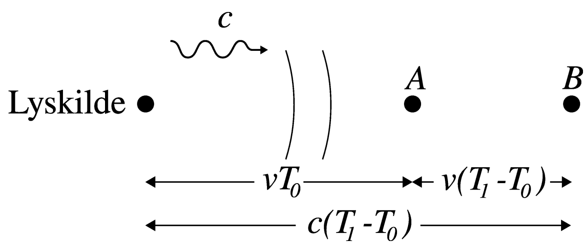
Merk hvordan likning (6.35) reduserer seg til uttrykket for hvileenergi dersom $\mathbf{p} = 0$ og til $E = cp$ dersom $m = 0$, som vi gjenkjenner fra avsnitt om energi og impuls i bølger.

6.11 Dopplereffekt

En observatør beveger seg med stor fart v vekk fra en lyskilde, i lysets fartsretning. Lyskilden sender ut lys med frekvens ν_0 målt i hvilesystemet. Observatøren vil måle en frekvens $\nu \neq \nu_0$. Vi opplever altså en dopplereffekt for lysbølgene.

Vi kan finne frekvensen ν som observatøren måler ved å sammenligne perioden T_0 som sendes ut fra lyskilden med perioden T som observatøren måler. La observatøren passere gjennom lyskilden ved tiden $t = 0$. Vi får da følgende sekvens, hvor t, T_0 og T_1 er tider målt i hvilesystemet:

- $t = 0$: Første bølgetopp sendes ut fra lyskilden, og første bølgetopp treffer observatøren
- $t = T_0$: Andre bølgetopp sendes ut fra lyskilden



Figur 6.11

- $t = T_1$: Andre bølgetopp treffer observatøren

Vi ser av figur 6.11 at ved tiden $t = T_0$ har observatøren flyttet seg fra lyskilden til punkt A, og han beveger seg videre til punkt B før andre bølgetopp ankommer ham ved tiden $t = T_1$. Dette gir følgende uttrykk for tiden T_1:

$$c(T_1 - T_0) = vT_0 + v(T_1 - T_0) \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} T_0. \tag{6.36}$$

Merk at likning (6.36) angir perioden som *lyskilden* måler fra den første pulsen til den andre treffer observatøren. Fordi observatøren beveger seg relativt lyskilden, må vi regne om T_1 til observatørens referansesystem. Siden observatøren hele tida er i ro i eget referansesystem og dermed mener at han mottar begge pulsene på samme sted, måler observatøren egentida mellom de to pulsene. Fra likning (6.15) har vi at egentiden $\Delta\tau = (1/\gamma)t$. Dette gir at perioden observatøren måler er

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\gamma} T_1 \\ &= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T_0, \end{aligned}$$

som medfører at

$$\nu = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_0. \tag{6.37}$$

Altså angir likning (6.37) frekvensen observatøren måler som funksjon av utsendt frekvens fra lydkilden.

Om vi nå antar at $v \ll c$, og rekkeutvikler brøken i likning (6.37) til første orden, får vi at[6]

$$
\begin{aligned}
\nu &= \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\nu_0 \\
&\approx \left(1-\frac{v}{2c}\right)\left(1-\frac{v}{2c}\right)\nu_0 \\
&\approx \left(1-\frac{v}{c}\right)\nu_0 = \frac{c-v}{c}\nu_0 \qquad (6.38)
\end{aligned}
$$

Denne likninga ser vi er identisk med likning 3.41 i avsnitt 3.5, som beskriver tilsvarende situasjon med lydbølger. Det er verdt å merke seg at i motsetning til hva som er tilfellet for lydbølger, er det for lysbølger ingen forskjell på om det er lyskilden eller observatøren som er i bevegelse – det er kun relativ-hastigheten som har noe å si.

[6] $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ og $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$.

Register

Ampere-Maxwells lov, 44
amplitude, 2, 10

bølgefront, 22
bølgelengde, 11
bølgelikninga, 13, 27
bølgetall, 14
båndbredde, 8
bulkmodul, 31

dielektrikum, 70
diffraksjon, 75
diffraksjonsgitter, 78
dipolantenne, 54
dipolmoment, 71
dispersjon, 24, 70
dopplereffekt, 37

egentiden, 86
Einsteins postulater, 83
elastisk modul, 27
elektromagnetiske bølger
  bølgelikninga for, 48
  i materie, 57
energi, 14
  i svingebevegelse, 2
energitetthet
  elektromagnetisk bølge, 51
energitransport, 17

første harmoniske, 21
fase, 2
fasehastighet, 11, 24
Fermats prinsipp, 67
forskyningsstrøm, 45
frekvens, 2, 11

geometriske problemer, 62
godhetsfaktor, 5
  for mekanisk svingesystem, 6
  for RCL-krets, 9
grensebetingelser
  for elektrisk felt, 58, 59
  for magnetisk felt, 58, 59
grunntone, 21
gruppehastighet, 24

halvverdibredde, *Se* båndbredde
harmonisk oscillator, 1
harmoniske bølger, 10
hendelse, 79
Huygens' prinsipp, 68

impuls, 27
impulstetthet
  elektromagnetisk bølge, 52
inertialsystemer, 79
intensitetsfordeling ved diffraksjon, 76
interferens, 74

knutepunkt, 21
kontinuitetslikninga, 43
konveks linse, 64
kritisk dempet, 5

lengdekontraksjon, 86
longitudinal bølge, 26
Lorentzfaktoren, 86
lydbølge, 29
lysets hastighet, 48
  i materie, 57

Mach-tall, 41
Malus' lov, 56
Maxwells likninger
  i materie, 57
  i vakuum, 47
  på differensialform, 47
  på integralform, 45

node, 21

oscillerende dipol, 53
overdempet, 5

partikkelhastighet, 11
parvis vinkelrette vinkelbein, 62
periode, 2, 11
planbølge, 22
polarisasjonsfilter, 56
polarisering, 55, 71
Poyntings vektor, 51
primær regnbue, 71

Q, *Se* godhetsfaktor

RCL-krets, 8
referansesystem, 79
refleksjon, 17, 33
    av elektromagnetiske bølger, 59
refleksjonskoeffisient, 20, 35
    for elektromagnetiske bølger, 61
refleksjonsloven, 69
regnbuen, 70
relativitetsprinsippet, 83
resonans, 7
resonansfrekvens, 70
retningsendring, 63
ring rundt månen, 73

sekundær regnbue, 72
sfæriske bølger, 23
sjokkbølge, 40
Snells brytningslov, 68, 70
stående bølge, 21, 36
stråling, elektromagnetisk, 52
superposisjon
    elektromagnetiske bølger, 49
svevefrekvens, 42
svevning, 41
svingning
    dempet, 3
    tvungen, 6
    udempet, 1

tidsdilatasjon, 85
toppvinkler, 62
transmisjon, 17, 33
    av elektromagnetiske bølger, 59
transmisjonskoeffisient, 20, 35
    for elektromagnetiske bølger, 61
tvillingparadokset, 89

underdempet, 4

vinkelfrekvens, 2
vinkelsum av n-kant, 63

Youngs modul, 30
Youngs tospalteeksperiment, 75