NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN TFY4160 BØLGEFYSIKK
Mandag 3. desember 2007 kl. 0900 - 1300
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

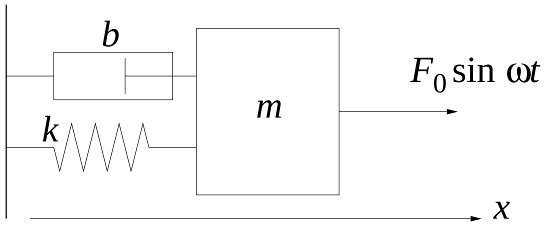
Side 2 - 6: Oppgavene.
Side 7 - 15: Formelsamling.

Prøva består av 7 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer når den er klar, seinest 3. januar.

OPPGAVE 1 [Teller 20%]

En masse m er festet til ei fjær med fjærkonstant k. Dempingskraften er proporsjonal med hastigheten, $-b\dot{x}$. En ytre kraft $F_0 \sin\omega t$ sørger for at massen svinger fram og tilbake med vinkelfrekvens ω.



• Vis at massens bevegelse er bestemt av ligningen

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin\omega t,$$

og bestem derved δ, ω_0 og A_0. Her er x massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.

• Løsningen av denne ligningen oppgis å være på formen

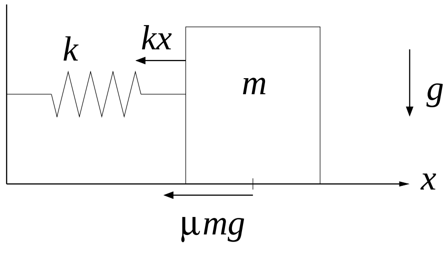
$$x(t) = x_0(\omega)\cos(\omega t + \phi)$$

der utsvingsamplitudens frekvensavhengighet er gitt ved

$$x_0(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\delta)^2}}$$

Anta svak demping, dvs $\delta \ll \omega_0$, og regn ut resonanstoppens halvverdibredde $\Delta\omega$, dvs differansen mellom de to vinkelfrekvensene $\omega_\pm = \omega_0 \pm \Delta\omega/2$ som gir amplitude x_0 lik maksimal amplitude dividert med $\sqrt{2}$. (Med svak demping oppnås maksimal amplitude for $\omega \simeq \omega_0$.)

Den hastighetsavhengige dempekraften erstattes nå med ordinær friksjon mot et underlag med friksjonskoeffisient μ (som er like stor statisk og dynamisk), slik at det hele tiden virker en friksjonskraft μmg, motsatt rettet massens bevegelse. Her er g tyngdens akselerasjon. (Ligger massen i ro, er friksjonskraften *inntil* μmg, motsatt rettet øvrige krefter som forsøker å sette massen i bevegelse.) Vi skrur dessuten av den ytre kraften og studerer fri svingninger. Figuren viser eksempelvis situasjonen med $x > 0$ og $\dot{x} > 0$.



Posisjonen $x = 0$ for massen tilsvarer at fjæra verken er strukket eller presset sammen. Ved tidspunktet $t = 0$ trekkes massen mot høyre, til posisjonen $x(0) = 4.5\mu mg/k$, og slippes uten starthastighet.
• Vis at massens bevegelse beskrives av ligningen(e)

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

der vi har innført $\xi = x \pm \mu mg/k$, og der fortegnet avhenger av om massen beveger seg mot høyre eller venstre. Hva blir vinkelfrekvensen ω?
• Skisser $x(t)$ fra $t = 0$ til $t = 3T/2$. Her er $T = 2\pi/\omega$ svingebevegelsens periode. Gi en kort kommentar til grafen.

OPPGAVE 2 [Teller 15%]

I denne oppgaven ser vi på overflatebølger på dypt vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

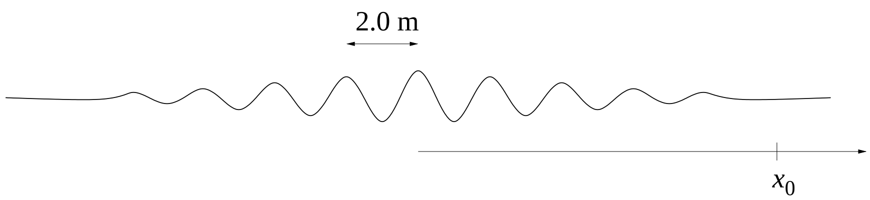
$$\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$$

Her er k bølgetallet, $g = 9.8$ m/s^2 tyngdens akselerasjon, $\rho = 10^3$ kg/m^3 vannets massetetthet og $\gamma = 0.073$ N/m vannets overflatespenning.

• Bestem perioden til bølger med bølgelengde $\lambda = 2.0$ m.

• Bestem bølgelengden*e* til bølger med fasehastighet $v_f = 1.0$ m/s.

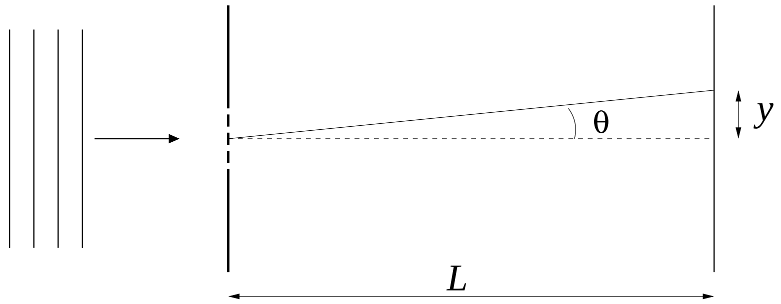
• En bølgepakke har 9 tydelige bølgetopper og bølgelengde 2.0 m. Vi antar at bølgepakkens totale utstrekning tilsvarer 8.5 bølgelengder, dvs 17.0 m, og at denne ikke endrer seg nevneverdig mens vi foretar våre observasjoner. Figuren viser et øyeblikksbilde av bølgepakken:



Vi retter nå øynene mot en fast posisjon x_0 og følger nøye med mens bølgepakken passerer. Hvor lang tid bruker bølgepakken på å passere x_0? Hvor mange bølgetopper ser vi passere x_0? Begrunn svaret. (Kommentar: En slik romlig avgrenset bølgepakke må strengt tatt "inneholde" flere bølgelengder enn den ene på 2.0 m som det her er snakk om. Opplysningen om at bølgepakkens utstrekning ikke endrer seg, er imidlertid tilstrekkelig for å besvare spørsmålene.)

OPPGAVE 3 [Teller 15%]

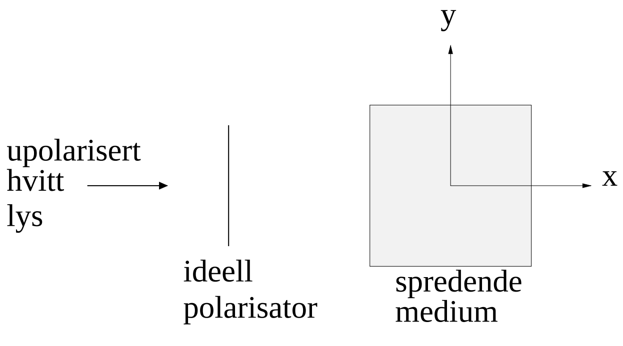
Monokromatisk lys med bølgelengde $\lambda = 632.8$ nm faller normalt inn mot 4 smale parallelle spalter. Hver spalte har bredde $a = 40.00$ μm, og senter-til-senter avstanden mellom spaltene er $d = 125.0$ μm. Lyset som passerer gjennom spaltene, treffer en skjerm som er plassert i avstand $L = 300.0$ cm fra spalteåpningene, og resulterer i en intensitetsfordeling $I(y)$. I figuren er spaltenes lengderetning normalt på papirplanet:



• Skriv ned et uttrykk for intensitetsfordelingen $I(y)$ som gjelder for små avbøyningsvinkler θ. I dette uttrykket skal bare y stå igjen som variabel parameter (i tillegg til "prefaktoren" I_0, som angir 1/16 av intensiteten i $y = 0$). Bruk 4 gjeldende siffer for numeriske faktorer som inngår i uttrykket, og pass på å angi hvilken enhet (m, cm, mm ..) du bruker for y.

• Hvor mange nullpunkter har $I(y)$ totalt innenfor det sentrale diffraksjonsmaksimum? (Med det "sentrale diffraksjonsmaksimum" menes området mellom y_0 og $-y_0$, der y_0 tilsvarer posisjonen til første nullpunkt dersom vi kun hadde *en* spalte med bredde a.) Skisser $I(y)$ for $-y_0 < y < y_0$.

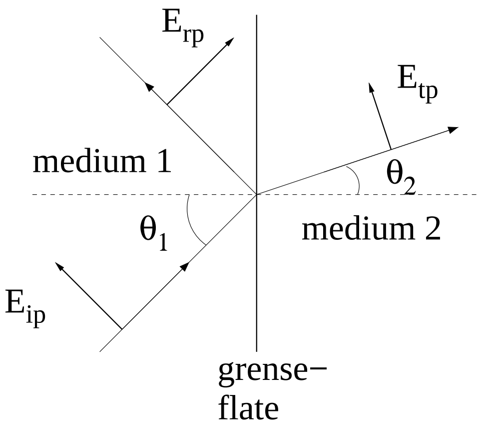
OPPGAVE 4 [Teller 10%]



Upolarisert hvitt lys sendes inn mot en beholder med et spredende medium. Sprederne i beholderen kan betraktes som induserte oscillerende elektriske dipoler med dipolmoment $\boldsymbol{p}$ i samme retning som $\boldsymbol{E}$ i det innkommende lyset. (Konsentrasjonen av spredere er tilstrekkelig liten til at vi kan se bort fra at spredt lys spres på nytt.) Det innkommende lyset passerer gjennom en ideell polarisator slik at lyset som treffer beholderen har $\boldsymbol{E} \parallel \hat{y}$.

• Diskuter kvalitativt (og kort) intensiteten, polariseringen og fargen til lyset som spres i henholdsvis $y-$ og $z-$retningen.

OPPGAVE 5 [Teller 10%]



En monokromatisk plan elektromagnetisk bølge faller inn mot en plan grenseflate mellom to umagnetiske dielektriske medier 1 og 2, se figuren ovenfor. Dersom bølgen er polarisert parallelt med innfallsplanet, vil sammenhengen mellom amplituden til reflektert bølge, E_{rp0}, og amplituden til innkommende bølge, E_{ip0}, være gitt ved

$$E_{rp0} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{ip0}$$

Her er $\alpha \equiv \cos\theta_2/\cos\theta_1$ og $\beta \equiv \mu_1 v_1/\mu_2 v_2$, der μ_j og v_j er henholdsvis magnetisk permeabilitet og lyshastighet i medium nr j ($j = 1, 2$). Med umagnetiske medier er $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
Den innkommende bølgen blir fullstendig transmittert dersom innfallsvinkelen θ_1 sammenfaller med Brewsters vinkel θ_B.

• Vis at Brewsters vinkel er gitt ved

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

der n_1 og n_2 er brytningsindeks i henholdsvis medium 1 og 2.

OPPGAVE 6 [Teller 10%]

• Vis at en elektromagnetisk bølge i vakuum, med

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

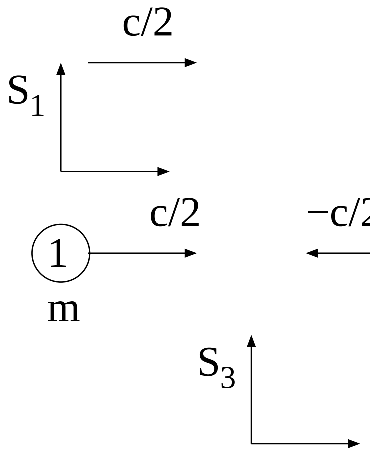
og

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

er transversal. Tips: Maxwells ligninger.

OPPGAVE 7 [Teller 20%]

To like store masser m beveger seg rett mot hverandre. Før de kolliderer med hverandre, har massene 1 og 2 hastighet henholdsvis $c/2$ og $-c/2$, målt i labsystemet S_3. Her er c lyshastigheten. (Vi har med andre ord valgt positive hastigheter mot høyre.) Massene 1 og 2 er, før kollisjonen, i ro i henholdsvis referansesystem S_1 og S_2.

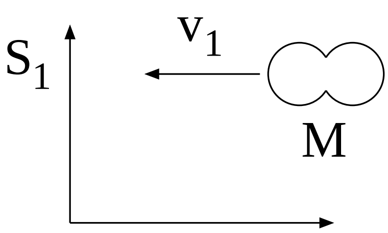


• Før kollisjonen er de to massene 1 og 2 kuleformede i sine respektive hvilesystem S_1 og S_2. Hva slags form har de i S_3? Begrunn svaret.

• La oss med notasjonen v_{ij} angi hastigheten til S_i observert i S_j $(i, j = 1, 2, 3)$, slik at $v_{13} = c/2$ og $v_{23} = -c/2$. Bestem de resterende relativhastighetene v_{31}, v_{32}, v_{12} og v_{21}.

• Hva er systemets totale (relativistiske) impuls p_3 og energi E_3 i S_3? (Med "systemet" menes her de to massene 1 og 2.) Bestem også total impuls p_1 og energi E_1 i S_1.

De to massene kolliderer fullstendig uelastisk og blir hengende sammen som ett legeme med masse M etter kollisjonen.



• Bruk prinsippene om impuls- og energibevarelse til å bestemme M. Hva er legemets hastighet v_1 målt i S_1? (S_1 er fortsatt referansesystemet som beveger seg med hastighet $c/2$ relativt labsystemet S_3.)

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

  Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\,\nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}
\end{aligned}$$

- Maxwells ligninger etc:

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

- Energitetthet, Poyntings vektor:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}
\Delta D_\perp &= 0 \\
\Delta E_\parallel &= 0 \\
\Delta B_\perp &= 0 \\
\Delta H_\parallel &= 0
\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter med bredde a:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.