NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 BØLGEFYSIKK
Mandag 10. desember 2007 kl. 0900 - 1300
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

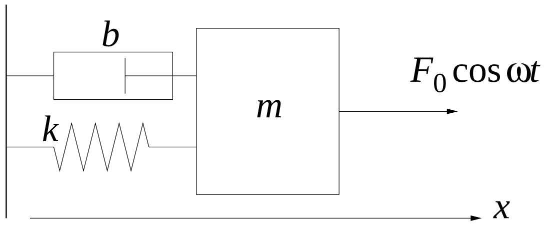
Side 2 - 6: Oppgavene
Side 7 - 15: Formelsamling

Prøva består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer når den er klar, seinest i begynnelsen av januar.

OPPGAVE 1 [Teller 20%]

En masse m er festet til ei fjær med fjærkonstant k. Dempingskraften er proporsjonal med hastigheten, $-b\dot{x}$. En ytre kraft $F_0 \cos \omega t$ sørger for at massen svinger fram og tilbake med vinkelfrekvens ω.



- Vis at massens bevegelse er bestemt av ligningen

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t,$$

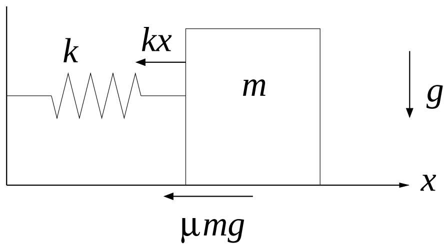
og bestem derved δ, ω_0 og A_0. Her er x massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.

- Løsningen av denne ligningen oppgis å være på formen

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Bestem fasekonstanten ϕ og skisser denne som funksjon av vinkelfrekvensen ω, i det du antar svak demping, dvs $\delta \ll \omega_0$. Oppgitt: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Den hastighetsavhengige dempekraften erstattes nå med ordinær friksjon mot et underlag med friksjonskoeffisient μ (som er like stor statisk og dynamisk), slik at det hele tiden virker en friksjonskraft μmg, motsatt rettet massens bevegelse. Her er g tyngdens akselerasjon. (Ligger massen i ro, er friksjonskraften *inntil* μmg, motsatt rettet øvrige krefter som forsøker å sette massen i bevegelse.) Vi skrur dessuten av den ytre kraften og studerer fri svingninger. Figuren viser eksempelvis situasjonen med $x > 0$ og $\dot{x} > 0$.



Posisjonen $x = 0$ for massen tilsvarer at fjæra verken er strukket eller presset sammen. Ved tidspunktet $t = 0$ trekkes massen mot høyre, til posisjonen $x(0) = 2.5\mu mg/k$, og slippes uten starthastighet.
• Vis at massens bevegelse beskrives av ligningen(e)

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

der vi har innført $\xi = x \pm \mu mg/k$, og der fortegnet avhenger av om massen beveger seg mot høyre eller venstre. Hva blir vinkelfrekvensen ω?
• Hvor mye energi går tapt, på grunn av friksjon, i løpet av bevegelsens første halve periode, dvs fra $t = 0$ til $t = T/2 = \pi/\omega$? Hvor mye energi går tapt mellom $t = T/2$ og $t = T$?

OPPGAVE 2 [Teller 15%]

I denne oppgaven ser vi på tyngdebølger i grenseflaten mellom luft og vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

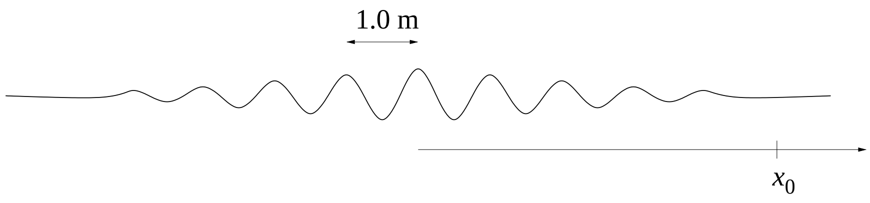
$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kd)}$$

Her er k bølgetallet, $g = 9.8$ m/s^2 tyngdens akselerasjon og d vannets dybde. Anta at $d = 25$ cm.

• Bestem perioden til bølger med bølgelengde $\lambda = 0.5$ m.

• Bestem bølgelengden til bølger med fasehastighet $v_f = 0.5$ m/s.

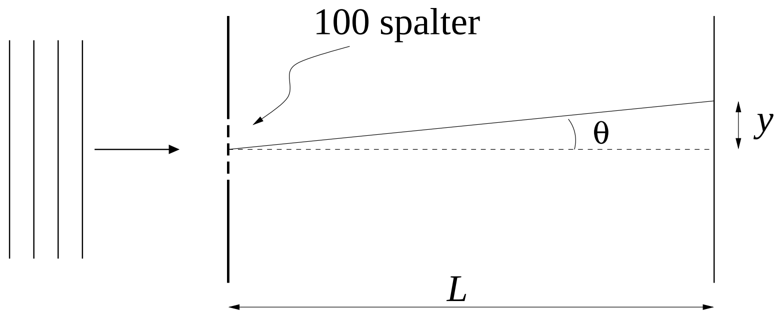
• En bølgepakke har 9 tydelige bølgetopper og bølgelengde 1.0 m. Vi antar at bølgepakkens totale utstrekning tilsvarer 8.5 bølgelengder, dvs 8.5 m, og at denne ikke endrer seg nevneverdig mens vi foretar våre observasjoner. Figuren viser et øyeblikksbilde av bølgepakken:



Vi retter nå øynene mot en fast posisjon x_0 og følger nøye med mens bølgepakken passerer. Hvor lang tid bruker bølgepakken på å passere x_0? Hvor mange bølgetopper ser vi passere x_0? Begrunn svaret. (Kommentar: En slik romlig avgrenset bølgepakke må strengt tatt "inneholde" flere bølgelengder enn den ene på 1.0 m som det her er snakk om. Opplysningen om at bølgepakkens utstrekning ikke endrer seg, er imidlertid tilstrekkelig for å besvare spørsmålene.) Oppgitt: $d(\tanh x)/dx = 1/\cosh^2 x$.

OPPGAVE 3 [Teller 15%]

Monokromatisk laserlys med bølgelengde λ faller normalt inn mot et diffraksjonsgitter med $N = 100$ spalter. Hver spalte har bredde a, og senter-til-senter avstanden mellom spaltene er $d = 8a$. Lyset som passerer gjennom spaltene, treffer en skjerm som er plassert i avstand L fra spalteåpningene, og resulterer i en intensitetsfordeling $I(y)$. I figuren er spaltenes lengderetning normalt på papirplanet:

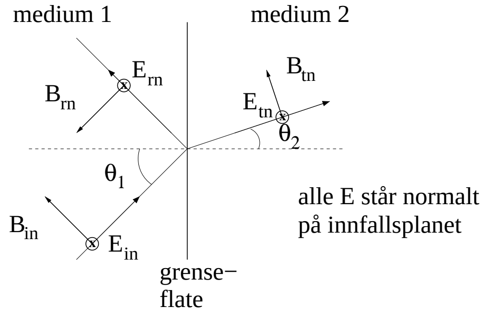


• Innfør den dimensjonsløse størrelsen $\phi = \pi d \sin\theta/\lambda$ og skriv ned et uttrykk for intensitetsfordelingen $I(\phi)$. I dette uttrykket skal bare ϕ gjenstå som variabel parameter, i tillegg til prefaktoren I_0, som angir $1/N^2$ av intensiteten til 0. ordens hovedmaksimum, dvs $I_0 = I(\phi = 0)/N^2$.

• Når ϕ (og dermed θ og y) økes fra verdien 0, går $I(\phi)$ gjennom diverse nullpunkter og såkalte sekundære maksima. I det første sekundære maksimum har intensiteten allerede falt til ca 1/22 av $I(0)$. Ved hvilken verdi av ϕ finner du fjerde sekundære maksimum? Hvor stor er intensiteten til fjerde sekundære maksimum (i forhold til $I(0)$)?

• Når ϕ har blitt så stor at vi har passert 99 nullpunkter, kommer vi til 1. ordens hovedmaksimum, som har intensitet $0.95I(0)$. Bestem intensiteten til 4. ordens hovedmaksimum (i forhold til $I(0)$).

OPPGAVE 4 [Teller 20%]



En monokromatisk plan elektromagnetisk bølge faller inn mot en plan grenseflate mellom luft (medium 1) og et magnetisk og dielektrisk medium (medium 2), se figuren ovenfor. Brytningsindeksen i luft er 1. Brytningsindeksen i medium 2 er $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, der ε_r er relativ permittivitet og μ_r er relativ permeabilitet.

Dersom bølgen er polarisert normalt på innfallsplanet, vil sammenhengen mellom amplituden til reflektert bølge, E_{rn0}, og amplituden til innkommende bølge, E_{in0}, være gitt ved

$$E_{rn0} = \frac{\alpha \cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\alpha \cos\theta_1 + \cos\theta_2} E_{in0}$$

der $\alpha \equiv \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$.

• Den innkommende bølgen blir fullstendig transmittert dersom innfallsvinkelen θ_1 sammenfaller med Brewsters vinkel θ_B. Vis at Brewsters vinkel er gitt ved

$$\sin\theta_B = \sqrt{\frac{n^2(\alpha^2 - 1)}{n^2\alpha^2 - 1}}$$

• Anta at medium 2 har relativ permittivitet $\varepsilon_r = 1.8$. Hva slags verdier er da aktuelle for mediets relative permeabilitet μ_r dersom Brewsters vinkel θ_B skal ligge mellom 0 og 90 grader for den valgte polarisasjonsretningen? (Vi antar at $n > 1$.)

• Hittil i denne oppgaven har vi sett på fullstendig transmisjon. La oss nå diskutere mulighetene for å oppnå *total refleksjon* i grenseflaten mellom luft (medium 1) og et medium med brytningsindeks $n > 1$ (medium 2). Bruk Snells brytningslov til å finne et kriterium for innfallsvinkelen θ_i som resulterer i total refleksjon. Avgjør om en innfallsvinkel på 35 grader gir total refleksjon dersom $n = 1.8$, både for tilfellet at innkommende bølge befinner seg i luft (medium 1) og for tilfellet at innkommende bølge befinner seg i mediet med $n = 1.8$ (medium 2).

OPPGAVE 5 [Teller 10%]

Vis at for en elektromagnetisk bølge i vakuum, med

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

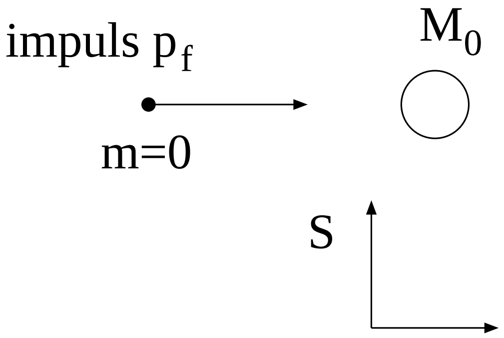
og

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

gjelder $B_0 = E_0/c$. Tips: Maxwells ligninger.

OPPGAVE 6 [Teller 20%]

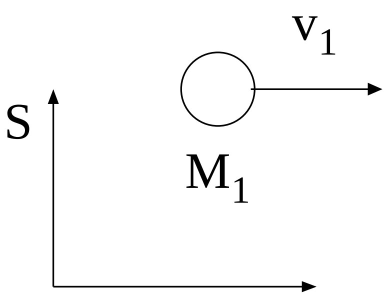
En kuleformet masse M_0 ligger i ro i labsystemet S. En masseløs partikkel ($m = 0$) (et foton) kommer inn fra venstre med impuls p_f.



• Bruk sammenhengene mellom (relativistisk) energi, impuls og masse til å argumentere for at fotonet *må* ha hastighet c, dvs lysets hastighet.

• Skriv ned fotonets energi E_f, den kuleformede massens energi E_m, og systemets totale energi E_0 i S. (Med "systemet" menes her fotonet og den kuleformede massen.) Skriv også ned total impuls p_0 i S.

Fotonet og den kuleformede massen kolliderer fullstendig uelastisk, slik at fotonet absorberes. Etter kollisjonen består følgelig systemet kun av en masse M_1 som beveger seg mot høyre med hastighet v_1.



• Bruk prinsippene om impuls- og energibevarelse til å bestemme v_1 og M_1. Finn tilnærmede uttrykk for v_1 og M_1 som gjelder dersom fotonets energi E_f er meget liten i forhold til den kuleformede massens energi E_m. Er uttrykkene som forventet?

• Anta at massen etter kollisjonen fortsatt er kuleformet i sitt eget hvilesystem (dvs der den er i ro). Hva slags form har den da i S? Begrunn svaret.

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

  Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_{\text{O}} = \frac{1 - v_{\text{O}}/v}{1 - v_{\text{S}}/v}\,\nu_{\text{S}}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_{\text{S}}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}
\end{aligned}$$

- Maxwells ligninger etc:

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

- Energitetthet, Poyntings vektor:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}
\Delta D_{\perp} &= 0 \\
\Delta E_{\parallel} &= 0 \\
\Delta B_{\perp} &= 0 \\
\Delta H_{\parallel} &= 0
\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter med bredde a:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.