NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4160 BØLGEFYSIKK
Mandag 3. desember 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 7 oppgaver. Løsningsforslaget er på 6 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

• Newtons andre lov, $F = m\ddot{x}$, gir, med $F = -kx - b\dot{x} + F_0 \sin \omega t$:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Dvs, $\delta = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $A_0 = F_0/m$.
• Maksimal amplitude for $\omega = \omega_0$:

$$x_0^{\max} = \frac{A_0}{2\omega_0 \delta}$$

Dermed:

$$x_0^{\pm} = x_0(\omega_\pm) = \frac{A_0}{2\sqrt{2}\omega_0\delta}$$

Svak demping gir smal resonanstopp. Da kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 - \omega_\pm^2 &= \omega_0^2 - (\omega_0 \pm \Delta\omega/2)^2 \simeq \mp\omega_0\Delta\omega \\
2\omega_\pm\delta &= 2\omega_0\delta \pm \Delta\omega\delta \simeq 2\omega_0\delta
\end{aligned}$$

Kvadrering av $x_0^{\pm}$ og innsetting av disse tilnærmelsene gir

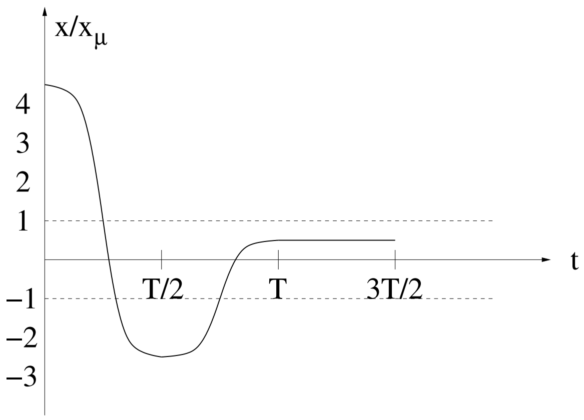
$$\begin{aligned}
\omega_0^2(\Delta\omega)^2 + 4\omega_0^2\delta^2 &= 8\omega_0^2\delta^2 \\
\Rightarrow \Delta\omega &= 2\delta
\end{aligned}$$

• Bruker også her Newtons andre lov:

$$\begin{aligned}
F &= -kx \mp \mu mg \\
m\ddot{x} + kx \pm \mu mg &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{k}{m}(x \pm \mu mg/k) &= 0 \\
\ddot{\xi} + \omega^2\xi &= 0
\end{aligned}$$

med $\xi = x \pm \mu mg/k$ og $\omega = \sqrt{k/m}$.

• Massen starter i $x(0) = 4.5x_\mu$, der vi har innført $x_\mu \equiv \mu mg/k$. Da er fjærkraften $-4.5kx_\mu$, dvs rettet mot venstre, og den er større enn maksimal friksjonskraft kx_μ, rettet mot høyre. Med andre ord, massen begynner å bevege seg mot venstre, ettersom total kraft $-4.5kx_\mu + kx_\mu = -3.5kx_\mu$ ikke er null. Ligningen for ξ viser at så lenge massen har hastighet mot venstre, dvs hele første halve periode, blir bevegelsen som for en udempet oscillator, omkring likevektsverdien $\xi = 0$, dvs omkring $x = \mu mg/k = x_\mu$. Den starter i $4.5x_\mu$, dvs amplituden for første halve periode er $3.5x_\mu$, dvs den snur i $-2.5x_\mu$. Nå er fjærkraften $2.5kx_\mu$, dvs rettet mot høyre, og den er fortsatt større enn maksimal friksjonskraft, som nå er $-kx_\mu$, dvs rettet mot venstre. Massen beveger seg mot høyre, og bevegelsen er fortsatt som for udempet oscillator, nå omkring likevektsverdien $x = -\mu mg/k = -x_\mu$. Den snudde i $-2.5x_\mu$, så amplituden for 2. halve periode blir $1.5x_\mu$. Dvs, den snur neste gang i posisjonen $0.5x_\mu$. Mer presist: Den *prøver* å snu her, men ettersom fjærkraften nå bare er $-0.5kx_\mu$, dvs mindre enn maksimal friksjonskraft, blir massen liggende i ro her. Figur:



OPPGAVE 2

• Periode T hvis $\lambda = 2.0$ m:

$$T = 2\pi/\omega \simeq 2\pi/\sqrt{2\pi \cdot 9.8/2.0} \simeq 1.13\,\mathrm{s}$$

(Leddet $\gamma k^3/\rho$ kan neglisjeres for så stor bølgelengde.)

• Fasehastigheten er:

$$v_f = \omega/k = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}$$

Kvadrering gir en 2.gradsligning for λ som kan løses direkte. Alternativt kan en mistenke at leddene $g\lambda/2\pi$ og $2\pi\gamma/\lambda\rho$ dominerer for hver sin mulige løsning for λ, hvilket stemmer:
Hvis 1. ledd dominerer: $\lambda = 2\pi v_f^2/g \simeq 0.64$ m.
Hvis 2. ledd dominerer: $\lambda = 2\pi\gamma/\rho v_f^2 \simeq 0.46$ mm.

• Bølgepakken beveger seg med gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk$, slik at det tar tiden $\tau = L/v_g$ for hele pakken å passere et bestemt sted, f.eks. x_0. Ser vi på "opp-og-ned"–bevegelsen ved x_0, vil den foregå med bølgens frekvens, dvs med perioden $T = 2\pi/\omega$, og vi vil telle at $N = \tau/T$ bølgetopper passerer ved x_0. Med $\lambda = 2.0$ m er $\omega(k) \simeq \sqrt{gk}$ slik at gruppehastigheten blir $v_g \simeq \sqrt{g\lambda/8\pi} \simeq 0.88$ m/s. Pakken bruker dermed tiden $\underline{\tau \simeq 17.0/0.88 \simeq 19.3 \text{ s}}$ på å passere ved x_0. Perioden har vi fra før: $T \simeq 1.13$ s. Antall bølgetopper som vi ser passere blir derfor $\underline{N = 19.3/1.13 = 17.1 \simeq 17}$.

OPPGAVE 3

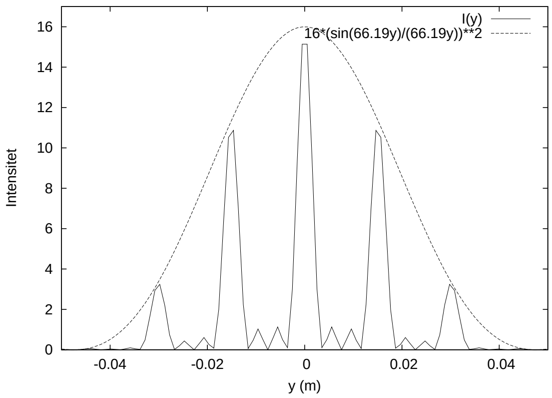
• Fra formelsamlingen, nederst side 13:

$$I(\theta) = I_0 \,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}\;\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

Her er $\sin\theta \simeq \tan\theta = y/L$. Videre: $\pi a/\lambda L \simeq 66.19$ m^{-1}, $\pi d/\lambda L \simeq 206.9$ m^{-1} og $4\pi d/\lambda L \simeq 827.4$ m^{-1}. Dermed, med y i m:

$$I(y) = I_0 \left(\frac{\sin 66.19y}{66.19y}\right)^2 \left(\frac{\sin 827.4y}{\sin 206.9y}\right)^2$$

• "Diffraksjonsfaktoren" $(\sin(66.19y)/(66.19y))^2$ har 1. nullpunkt for $y = \pm y_0 = \pm\pi/66.19 = \pm 0.04746$ m. "Interferensfaktoren" $(\sin(827.4y)/\sin(206.9y))^2$ resulterer i hovedmaksima for $y_n = \pm n\pi/206.9 = \pm 0.01519n$, som betyr at 1., 2. og 3. ordens hovedmaksima ligger innenfor $\pm y_0$. Et diffraksjonsgitter med N spalter gir $N-1$ nullpunkter mellom to hovedmaksima. Følgelig er det i alt 18 nullpunkter mellom $-y_0$ og y_0. (1. nullpunkt utenfor 3. hovedmaksimum tilsvarer $y = 13\pi/827.4 = 0.04936 > y_0$ og telles dermed ikke med.) Intensitetsfordelingen:



Nullpunktene utenfor 2. hovedmaksimum er knapt synlige fordi faktoren $(\sin(66.19y)/(66.19y))^2$ her begynner å bli meget liten.

OPPGAVE 4

• Det spredte lyset tilsvarer stråling fra oscillerende elektriske dipoler med $\boldsymbol{p} \parallel \hat{y}$. Intensiteten avhenger av frekvensen som $I \sim \omega^4$ og av retningen som $I \sim \sin^2\theta$, der θ er vinkelen mellom y-aksen og forplantningsretningen til det spredte lyset. I y-retningen er $\theta = 0$, og dermed $I = 0$. I z-retningen er $\theta = \pi/2$, og dermed $I = I_{\max}$. Dette lyset vil være polarisert i y-retningen. Det vil fortrinnsvis være blått da blått lys har høyere frekvens enn rødt lys.

OPPGAVE 5

• Vi setter $\theta_1 = \theta_B$. Vi har $\beta = \mu_1 v_1/\mu_2 v_2 = n_2/n_1$ og $\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_B/n_2 = \sin\theta_B/\beta$. Fullstendig transmisjon betyr $E_{rp0} = 0$, dvs $\alpha = \beta$ og dermed:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_B} &= \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \beta \\
\frac{1-\sin^2\theta_2}{1-\sin^2\theta_B} &= \beta^2 \\
1 - \frac{1}{\beta^2}\sin^2\theta_B &= \beta^2 - \beta^2\sin^2\theta_B \\
\sin^2\theta_B &= \frac{\beta^2-1}{\beta^2-1/\beta^2} = \beta^2\frac{\beta^2-1}{\beta^4-1} = \frac{\beta^2}{\beta^2+1} \\
\cos^2\theta_B &= 1-\sin^2\theta_B = 1-\frac{\beta^2}{\beta^2+1} = \frac{1}{\beta^2+1} \\
\tan^2\theta_B &= \frac{\sin^2\theta_B}{\cos^2\theta_B} = \beta^2
\end{aligned}$$

som vi skulle vise.

(Alternativt: Brewster fant eksperimentelt i 1812 at $\theta_B + \theta_2 = \pi/2$. Dermed er $\sin\theta_2 = \cos\theta_B$, som kombinert med Snells lov, $\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_B$, umiddelbart gir $\tan\theta_B = n_2/n_1$.)

OPPGAVE 6

• Vi trenger differensialformene av Gauss' lov, $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ (vakuum, dvs $\rho = 0$), og den tilsvarende for magnetfeltet, $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$. Anvendt på den oppgitte bølgen får vi

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$$

som viser at både $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ står normalt på $\boldsymbol{k}$, dvs normalt på bølgens forplantningsretning. (Det var her ikke påkrevd å vise at $\boldsymbol{k}$ sammenfaller med bølgens forplantningsretning.)

OPPGAVE 7

• I S_3 vil massene bli ovale, dvs sammentrykt langs den aksen som de beveger seg, pga lengdekontraksjon. ($L = L'/\gamma_{13} = L'/\gamma_{23} < L'$)

• Har åpenbart $v_{31} = -v_{13} = -c/2$ og $v_{32} = -v_{23} = c/2$. Videre:

$$v_{12} = \frac{v_{13} + v_{32}}{1 + v_{13}v_{32}/c^2} = \frac{c/2 + c/2}{1 + 1/4} = \frac{4c}{5}$$

og endelig $v_{21} = -v_{12} = -4c/5$.

• De to massene har impulser som er like store i absoluttverdi, men med motsatt retning. Total impuls i S_3 er dermed $p_3 = 0$. Hver masse har i S_3 en energi γmc^2, med $\gamma = 1/\sqrt{1 - 1/4} = 2/\sqrt{3}$. Total energi i S_3 er dermed

$$E_3 = 2\gamma mc^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}mc^2$$

I S_1 har masse 1 null impuls, så total impuls p_1 blir lik impulsen til masse 2, dvs:

$$p_1 = \gamma_{21} m v_{21} = \frac{1}{\sqrt{1 - (4/5)^2}} \cdot m \cdot (-4c/5) = -\frac{4}{3}mc$$

I S_1 har masse 1 bare hvileenergi mc^2, mens masse 2 har energi $\gamma_{21}mc^2$. Total energi blir

$$E_1 = mc^2 + \gamma_{21}mc^2 = (1 + 5/3)\,mc^2 = \frac{8}{3}mc^2$$

• Pga impulsbevarelse er M i ro i S_3 etter kollisjonen. Energien er dermed hvileenergien Mc^2. Energibevarelse gir da

$$E_3 = Mc^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}mc^2$$

dvs

$$M = \frac{4}{\sqrt{3}}m$$

Ettersom legemet er i ro i S_3 etter kollisjonen, og S_3 beveger seg med hastighet $v_{31} = -c/2$ relativt S_1, kan vi uten videre konkludere med at

$$v_1 = v_{31} = -c/2$$

En mer omstendelig metode er å bruke impulsbevarelse i S_1. Det gir

$$p_1 = -\frac{4}{3}mc = \gamma_1 M v_1 = \frac{Mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

dvs

$$\frac{16}{9}m^2c^2 = \frac{(4m/\sqrt{3})^2 v_1^2}{1 - v_1^2/c^2}$$

og dermed, etter litt regning,

$$4v_1^2 = c^2$$

Da $p_1 < 0$, vet vi at vi her må velge den negative løsningen $v_1 = -c/2$.