NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1002 BØLGEFYSIKK
Mandag 10. desember 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 6 oppgaver. Løsningsforslaget er på 6 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

• Newtons andre lov, $F = m\ddot{x}$, gir, med $F = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega t$:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Dvs, $\delta = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $A_0 = F_0/m$.

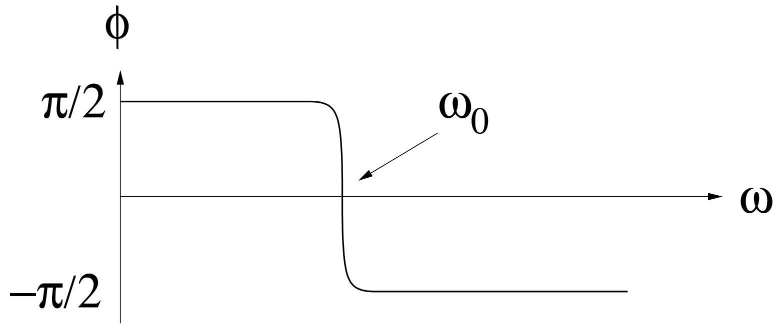
• Innsetting av oppgitt løsning gir

$$\left[-\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + 2\omega\delta\cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 \sin(\omega t + \phi)\right] x_0 = A_0 \cos\omega t$$

Bruker oppgitte uttrykk for sinus og cosinus til sum av to vinkler og får dermed *to* ligninger som må være oppfylt hver for seg, den ene proporsjonal med $\sin\omega t$ og den andre med $\cos\omega t$. Den som er proporsjonal med $\sin\omega t$ inneholder kun fasekonstanten ϕ (dvs ikke A_0) og gir oss det vi trenger her:

$$\begin{aligned}
\left(-\omega^2\cos\phi - 2\omega\delta\sin\phi + \omega_0^2\cos\phi\right) x_0 \sin\omega t &= 0 \\
-\omega^2\cos\phi - 2\omega\delta\sin\phi + \omega_0^2\cos\phi &= 0 \\
\tan\phi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\delta} \\
\phi &= \arctan\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\delta}
\end{aligned}$$

Vi ser at $\phi = 0$ når $\omega = \omega_0$. Dersom $\delta \ll \omega_0$, vil argumentet til arctan-funksjonen raskt bli stort og negativt hvis $\omega > \omega_0$, og raskt bli stort og positivt hvis $\omega < \omega_0$. Med andre ord, ϕ er ca $\pi/2$ når $\omega < \omega_0$ og ca $-\pi/2$ når $\omega > \omega_0$.



• Bruker også her Newtons andre lov:

$$\begin{aligned}
F &= -kx \mp \mu mg \\
m\ddot{x} + kx \pm \mu mg &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x \pm \mu mg/k\right) &= 0 \\
\ddot{\xi} + \omega^2\xi &= 0
\end{aligned}$$

med $\xi = x \pm \mu mg/k$ og $\omega = \sqrt{k/m}$.

• Massen starter i $x(0) = 2.5x_\mu$, der vi har innført $x_\mu \equiv \mu mg/k$. Da er fjærkraften $-2.5kx_\mu$, dvs rettet mot venstre, og den er større enn maksimal friksjonskraft kx_μ, rettet mot høyre. Med andre ord, massen begynner å bevege seg mot venstre, ettersom total kraft $-2.5kx_\mu + kx_\mu = -1.5kx_\mu$ ikke er null. Ligningen for ξ viser at så lenge massen har hastighet mot venstre, dvs hele første halve periode, blir bevegelsen som for en udempet oscillator, omkring likevektsverdien $\xi = 0$, dvs omkring $x = \mu mg/k = x_\mu$. Den starter i $2.5x_\mu$, dvs amplituden for første halve periode er $1.5x_\mu$, dvs den snur i $-0.5x_\mu$. Mer presist: Den *prøver* å snu her, men ettersom fjærkraften nå bare er $0.5kx_\mu$, dvs mindre enn maksimal friksjonskraft, blir massen liggende i ro her. Tapt energi i løpet av 1. halve periode kan beregnes på to måter:

$$
\begin{aligned}
W &= F_\mu \cdot \Delta x = \mu mg \cdot 3\mu mg/k = 3kx_\mu^2 \\
W &= \Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}k(5\mu mg/2k)^2 - \frac{1}{2}k(-\mu mg/2k)^2 = 3kx_\mu^2
\end{aligned}
$$

Ingen energi går tapt i 2. halve periode da massen nå ligger i ro.

OPPGAVE 2

• Periode T hvis $\lambda = 0.5$ m:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{9.8 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \tanh \pi} \simeq 0.57\,\text{s}$$

• Fasehastigheten er:

$$v_f = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{\lambda}}$$

Ettersom tallverdien av $\sqrt{g/2\pi}$ er 1.25 (i SI-enheter), må $v_f = 0.5$ m/s tilsvare en så liten λ at vi kan sette $\tanh(2\pi d/\lambda) \simeq 1$. Dermed:

$$\lambda \simeq \frac{2\pi v_f^2}{g} \simeq 0.16\,\text{m}$$

(Svaret viser at antagelsen om argumentet i tanh-funksjonen var fornuftig!)

• Bølgepakken beveger seg med gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk$, slik at det tar tiden $\tau = L/v_g$ for hele pakken å passere et bestemt sted, f.eks. x_0. Ser vi på "opp-og-ned"–bevegelsen ved x_0, vil den foregå med bølgens frekvens, dvs med perioden $T = 2\pi/\omega$, og vi vil telle at $N = \tau/T$ bølgetopper passerer ved x_0. Gruppehastigheten er:

$$
\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\
&= \sqrt{g}\frac{d}{dk}\left(\sqrt{k}\cdot\sqrt{\tanh kd}\right) \\
&= \sqrt{\frac{g}{4k}}\left(\sqrt{\tanh kd} + \frac{kd}{\cosh^2 kd\sqrt{\tanh kd}}\right)
\end{aligned}
$$

Med $\lambda = 1.0$ m har vi $kd = 1.5708$, $\tanh kd = 0.9172$ og $\cosh kd = 2.5092$, og dermed $v_g = 0.76$ m/s. Pakken bruker dermed tiden $\underline{\tau = 8.5/0.76 \simeq 11.2\text{ s}}$ på å passere ved x_0. Perioden blir $T = 2\pi/\sqrt{9.8 \cdot 2\pi \cdot 0.9172} \simeq 0.84$ s. Antall bølgetopper som vi ser passere blir $\underline{N = 11.2/0.84 = 13.3 \simeq 13}$.

OPPGAVE 3

• Fra formelsamlingen, nederst side 13:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \; \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

Innsetting av $\theta = 0$ gir $I(0) = I_0 \cdot 1 \cdot N^2 = N^2 I_0$, så I_0 omtalt i oppgaven og I_0 i uttrykket fra formelsamlingen er den samme. Med $\phi = \pi d \sin\theta/\lambda$ og $a = d/8$ kan intensiteten uttrykkes slik:

$$I(\phi) = I_0 \, \left(\frac{\sin\phi/8}{\phi/8}\right)^2 \, \left(\frac{\sin 100\phi}{\sin\phi}\right)^2$$

• 1. nullpunkt for $100\phi = \pi$, dvs $\phi = \pi/100$. 1. sekundære maksimum for $100\phi = 3\pi/2$, dvs $\phi = 3\pi/200 \ll 1$ og $\phi/8 = 3\pi/1600 \ll 1$. Intensitet i 1. sekundære maksimum: $I \simeq I_0 \cdot 1 \cdot (-1/\sin 3\pi/200)^2 \simeq N^2 I_0/(3\pi/2)^2 = I(0)/(9\pi^2/4) \simeq I(0)/22$, som oppgitt i oppgaven. Posisjonen til 4. sekundære maksimum er $100\phi = 9\pi/2$, dvs $\underline{\phi = 9\pi/200} \ll 1$ og $\phi/8 = 9\pi/1600 \ll 1$. Intensitet i 4. sekundære maksimum: $I \simeq I_0 \cdot 1 \cdot (1/9\pi/200)^2 \simeq N^2 I_0/(9\pi/2)^2 = I(0)/(81\pi^2/4) \simeq \underline{I(0)/200}$.

• 1. ordens hovedmaksimum for $\phi = \pi$, $\phi/8 = \pi/8$, med intensitet $I = I_0 \cdot (\sin(\pi/8)/(\pi/8))^2 \cdot N^2 \simeq I(0) \cdot 0.95$, som gitt i oppgaven. 4. ordens hovedmaksimum for $\phi = 4\pi$, $\phi/8 = \pi/2$, med intensitet $I = I_0 \cdot (\sin(\pi/2)/(\pi/2))^2 \cdot N^2 = I(0) \cdot 4/\pi^2 \simeq 0.41 I(0)$.

OPPGAVE 4

• Fullstendig transmisjon betyr $E_{rn0} = 0$, dvs (med $\theta_1 \to \theta_B$):

$$\begin{aligned}
\alpha\cos\theta_B &= \cos\theta_2 \\
\alpha^2(1-\sin^2\theta_B) &= 1-\sin^2\theta_2 = 1 - \frac{\sin^2\theta_B}{n^2} \\
\left(1/n^2-\alpha^2\right)\sin^2\theta_B &= 1-\alpha^2 \\
\sin^2\theta_B &= \frac{1-\alpha^2}{1/n^2-\alpha^2} = \frac{n^2(\alpha^2-1)}{n^2\alpha^2-1}
\end{aligned}$$

som vi skulle vise.

• I uttrykket for $\sin^2\theta_B$ er telleren alltid mindre enn nevneren dersom $n > 1$. Hvis $\alpha < 1$, er telleren negativ. Da må i tilfelle også nevneren være negativ for at $\sin^2\theta_B$ skal bli positiv. Men ettersom telleren er mindre enn nevneren, vil vi da få at $\sin^2\theta_B > 1$, som ikke er mulig. Konklusjonen blir at vi må ha $\alpha > 1$, og dermed $\underline{\mu_r > \varepsilon_r = 1.8}$. Kommentar: "Normale" dielektriske medier som glass og vann har $\mu_r \simeq 1.0 < \varepsilon_r$. Da blir total transmisjon ikke mulig for lys polarisert normalt på innfallsplanet.

• Snells lov: $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$, med n_i og n_t lik brytningsindeksen i mediet der hhv innkommende og transmittert bølge befinner seg. Dermed:

$$\sin\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i$$

Skal noe av bølgen transmitteres, må vi ha $\sin\theta_t < 1$. Hele bølgen vil derfor reflekteres dersom

$$\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i > 1$$

dvs

$$\theta_i > \arcsin\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

Dette er bare mulig dersom $n_i > n_t$, så i vårt tilfelle, med luft på den ene siden, blir kriteriet

$$\theta_i > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

og slik at innkommende bølge befinner seg i mediet med brytningsindeks $n > 1$. Med $n = 1.8$ blir kriteriet for total refleksjon $\theta_i > 33.75°$. Innfallsvinkel lik 35 grader gir dermed total refleksjon, men bare med innkommende bølge i mediet med $n = 1.8$.

OPPGAVE 5

• Differensialformen av Faraday–Henrys lov, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ gir, for den oppgitte elektromagnetiske bølgen

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = \omega\boldsymbol{B}_0$$

Elektromagnetiske bølger er transversale, så $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k}$. Dermed har vi at $kE_0 = \omega B_0$, dvs $B_0 = kE_0/\omega = E_0/c$, som skulle vises.

OPPGAVE 6

• Vi har $E = \gamma mc^2$ *og* $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Hvis $m = 0$:

$$E = pc = \gamma mc^2$$

Hvis $p \neq 0$ og samtidig $m = 0$, er eneste mulighet at $\gamma = \infty$, dvs $v = c$.

• $E_f = p_f c$, $E_m = M_0c^2$, $E_0 = E_f + E_m = p_f c + M_0 c^2$, $p_0 = p_f$.

• Energi- og impulsbevarelse gir ligningene

$$\begin{aligned}
\gamma_1 M_1 c^2 &= E_0 = p_f c + M_0 c^2 \\
\gamma_1 M_1 v_1 &= p_f \\
\text{der}\quad \gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}
\end{aligned}$$

Dividerer disse to med hverandre og finner

$$v_1/c^2 = \frac{p_f}{p_f c + M_0 c^2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{p_f}{p_f/c + M_0}$$

Fra ligningen for impulsbevarelse har vi dermed

$$M_1 = \frac{p_f}{\gamma_1 v_1} = \frac{p_f\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{v_1}$$

Innsetting av resultatet for v_1 og litt algebra gir

$$M_1 = M_0\sqrt{1 + \frac{2p_f}{M_0 c}}$$

Er fotonets energi $E_f = p_f c$ liten i forhold til $E_m = M_0 c^2$, får vi tilnærmet

$$\begin{aligned} v_1 &\simeq \frac{p_f}{M_0} \\ M_1 &\simeq M_0 \end{aligned}$$

Dette er som forventet, dvs det samme som vi ville finne hvis vi regnet "klassisk", eller *ikke-relativistisk*: $p_f = M_0 v_1$ (impulsbevarelse) og $M_0 = M_1$ (massebevarelse).

• I S vil massen bli oval, dvs sammentrykt langs den aksen som den beveger seg, pga lengdekontraksjon. ($L = L'/\gamma_1 < L'$)