NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FY1002 BØLGEFYSIKK

Fredag 18. mai 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver. Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a)

• Grunntonens bølgelengde: $\lambda_1 = 2L = 2 \cdot 0.65$ m $= 1.30$ m. Bølgehastigheten: $v_1 = \lambda_1 \nu_1 = 1.30 \cdot 196$ m/s $= 255$ m/s. Vi har fra formelarket at $v_1 = \sqrt{S/\mu}$, der μ er strengens masse pr lengdeenhet. For denne strengen:

$$\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi R^2 = 7800 \cdot \pi \cdot 0.00020^2 = 9.8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$$

Dermed blir strekk-krafta

$$S = \mu v_1^2 = 64\,\mathrm{N}$$

• Alle resonansfrekvenser har samme bølgehastighet da denne er bestemt ved strekk-krafta S og massen pr lengdeenhet μ. Andre overtone har bølgelengde $\lambda_3 = 2L/3 = 0.43$ m og frekvens $\nu_3 = 3\nu_1 = 588$ Hz.

•

$$\nu_\mathrm{O} = \frac{1 - v_\mathrm{O}/v}{1 - v\mathrm{S}/v}\,\nu_\mathrm{S} = \frac{1 - (-20)/340}{1 - 15/340} \cdot 196 = 217\ \mathrm{Hz}$$

b)

• Bølgetallsvektoren er $\boldsymbol{k} = k_x\,\hat{x} + k_y\,\hat{y}$. Med $t = 0$ og $y = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_x x$. Fra figuren ser vi at $k_x \cdot (2d/5) = 2\pi$, dvs $k_x = 5\pi/d$. Med $t = 0$ og $x = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_y y$. Fra figuren ser vi at $k_y \cdot (2d/3) = 2\pi$, dvs $k_y = 3\pi/d$. Dermed er

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\pi}{d}\sqrt{5^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{34}\pi}{d}$$

slik at bølgelengden blir

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2d}{\sqrt{34}} \simeq 5.1\,\mathrm{cm}$$

• Bølgens forplantningsretning er sammenfallende med $\boldsymbol{k}$. Dermed:

$$\tan\theta = \frac{k_y}{k_x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq 31^\circ$$

• Vi har $v = \lambda\nu = 5.1\,\mathrm{cm} \cdot 77\,\mathrm{s}^{-1} = 4.0\,\mathrm{m/s}$. Med forplantning i retning $\theta = 31^\circ$ i forhold til x-aksen har vi da $v_x = v\cos\theta \simeq 3.4$ m/s og $v_y = v\sin\theta \simeq 2.0$ m/s.

c)

• Fasehastighet:

$$v(k) = \frac{\omega}{k} = \omega_0\,\frac{\sin(kd/2)}{k} = \frac{\omega_0 d}{2}\,\frac{\sin(kd/2)}{kd/2}$$

Gruppehastighet:

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_0 d}{2}\,\cos(kd/2)$$

• Ser av uttrykkene over at

$$v(0) = v_g(0) = \frac{\omega_0 d}{2}$$

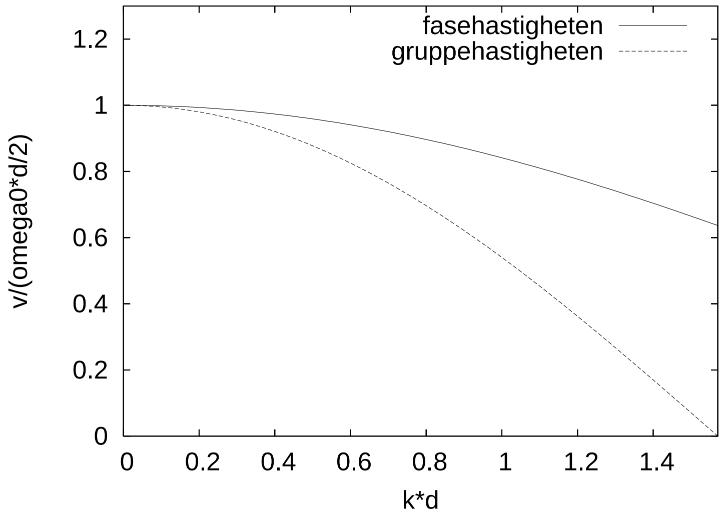
mens

$$v(\pi/d) = \frac{\omega_0 d}{2} \cdot \frac{1}{\pi/2} = \frac{\omega_0 d}{2} \cdot \frac{2}{\pi}$$

og

$$v_g(\pi/d) = 0$$

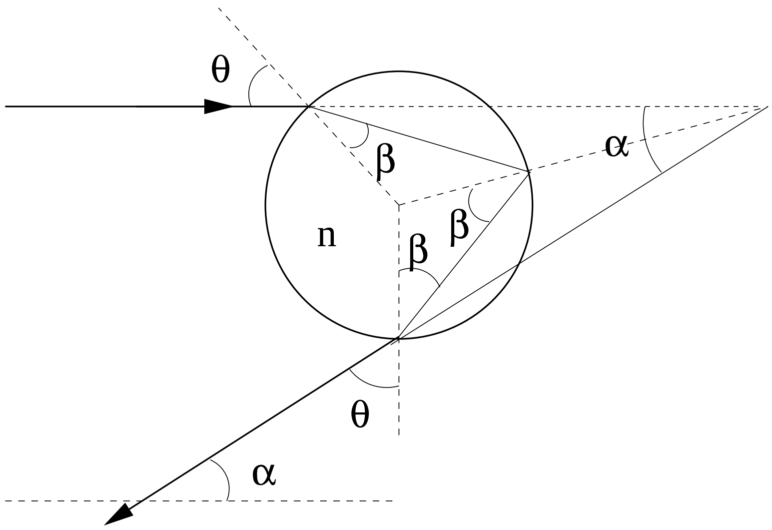
Skisse:



OPPGAVE 2

• Den primære regnbuen dannes ved at lyset fra sola brytes inn i vanndråpen, reflekteres i bakkant av dråpen og brytes ut i lufta igjen. Korte bølgelengder brytes litt mer enn lange bølgelengder. Dermed vil maksimal verdi for vinkelen α bli litt mindre for blått lys enn for rødt lys, med de andre fargene fordelt mellom disse ytterpunktene. På grunn av symmetrien i problemet vil alle dråper på en kjegleflate med en bestemt vinkel α reflektere lys på samme måte tilbake til observatørens øye, som ligger i kjeglens topp-punkt.

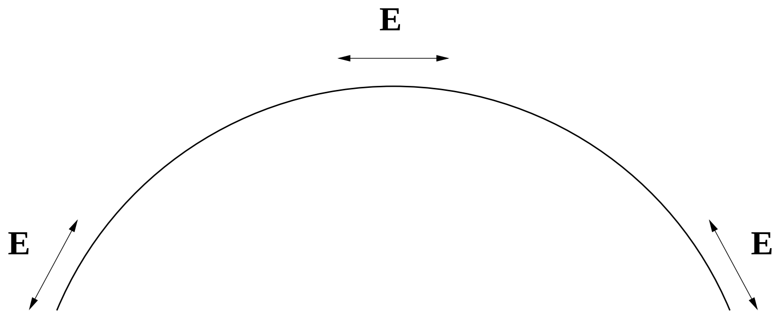
• For å finne α uttrykt ved θ og n, betrakter vi følgende figur:



Vi finner total *retningsendring*:
Ved første brytning: $\theta - \beta$
Ved refleksjon i bakkant: $\pi - 2\beta$
Ved andre brytning: $\theta - \beta$
Totalt: $\pi + 2\theta - 4\beta$
Vi ser at total retningsendring samtidig må være lik $\pi - \alpha$. Fra Snells brytningslov har vi dessuten $\sin\theta = n \sin\beta$, dvs $\beta = \arcsin[\sin(\theta)/n]$, så alt i alt:

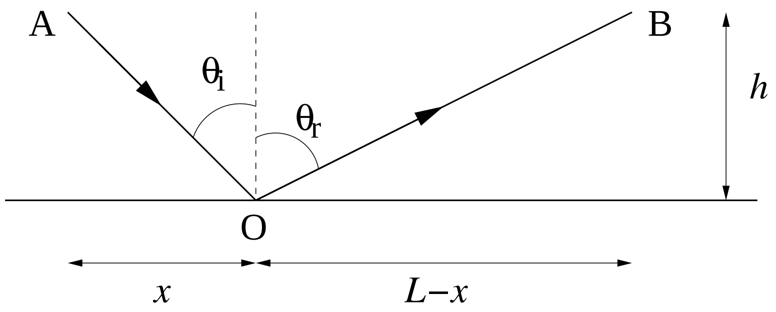
$$\alpha = 4\beta - 2\theta = 4 \arcsin[\sin(\theta)/n] - 2\theta$$

• Figuren i oppgaven viser at lyset som reflekteres i bakkant av dråpen fortrinnsvis vil ha $\boldsymbol{E}$ normalt på innfallsplanet, ettersom Rn $\gg$ Rp. Riktignok vil Tp, transmisjonskoeffisienten for lys med $\boldsymbol{E}$ parallelt med innfallsplanet, være større enn Tn, transmisjonskoeffisienten for lys med $\boldsymbol{E}$ normalt på innfallsplanet, men både Tp og Tn er store (typisk større enn 0.9), slik at det i de to brytningene ikke gjøres særlig forskjell på de to polarisasjonsretningene. Vi må derfor forvente at regnbuen fortrinnsvis er polarisert normalt på innfallsplanet. Innfallsplanet vil her si det samme som papirplanet, dvs et plan som inneholder innkommende stråle, de aktuelle dråpene og observatørens øye. Følgelig vil lyset fra regnbuen fortrinnsvis ha $\boldsymbol{E}$ tangentielt til buen:

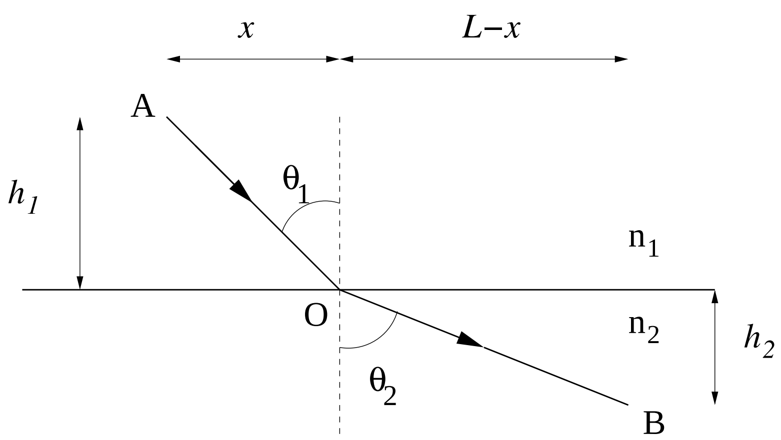


OPPGAVE 3

a)



Fermats prinsipp og refleksjon



Fermats prinsipp og brytning

Fermats prinsipp og refleksjon:

Veistrekningen fra A via O til B er

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(L-x)^2 + h^2}$$

Hele veien ligger i medium 1, slik at lyshastigheten ikke endrer seg. Dermed blir det ett fett om vi minimerer tidsbruken eller veilengden. Vi finner minste veistrekning ved å derivere s mhp x og sette uttrykket lik null:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dx} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}} = 0 \\
\Rightarrow 2x\sqrt{(L-x)^2+h^2} &= 2(L-x)\sqrt{x^2+h^2} \\
\Rightarrow 4x^2(L^2 - 2Lx + x^2 + h^2) &= (4L^2 - 8Lx + 4x^2)(x^2+h^2) \\
\Rightarrow 4L^2h^2 - 8Lxh^2 &= 0 \\
\Rightarrow x &= L/2 \\
\Rightarrow \theta_i &= \theta_r
\end{aligned}$$

Fermats prinsipp og brytning:

Hastighet i medium 1 er v_1 og i medium 2 v_2. Tidsforbruk fra A via O til B blir da

$$t = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}{v_2}$$

Finner minimal tid ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{2(L-x)}{v_2\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}} = 0$$

Vi ser fra figuren at

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$$

mens

$$\sin\theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}$$

Dermed har vi uten videre

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

siden $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$.

b) Intensitetsmaksimum får vi når $d \sin\theta = n\lambda$. Felles intensitetsmaksimum for de to bølgelengdene λ_1 og λ_2 får vi dermed når

$$n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$$

Med $\lambda_1 = 600$ nm og $\lambda_2 = 650$ nm blir første anledning dersom $n_1 = 13$ og $n_2 = 12$. Avbøyningsvinkelen er da

$$\theta = \arcsin(n_1\lambda_1/d) = \arcsin\frac{7.8\cdot 10^{-6}}{2.0\cdot 10^{-5}} \simeq 23^\circ$$

Dette tilsvarer posisjonen

$$y = L\tan\theta \simeq 85\,\mathrm{cm}$$

OPPGAVE 4

• Det er bare avstander *langs* relativhastigheten som blir gjenstand for lorentzkontraksjon. Det betyr at Sam måler samme avstand langs y,

$$L_y = \overline{L}_y = \overline{L}\sin\overline{\alpha}$$

men en mindre avstand langs x,

$$L_x = \frac{\overline{L}_x}{\gamma} = \frac{\overline{L}\cos\overline{\alpha}}{\gamma}$$

Her er lorentzfaktoren

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Sam måler følgelig en avstand L mellom Siv og Arne:

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \\
&= \sqrt{\frac{\overline{L}^2\cos^2\overline{\alpha}}{\gamma^2} + \overline{L}^2\sin^2\overline{\alpha}} \\
&= \overline{L}\sqrt{(1 - v^2/c^2)\cos^2\overline{\alpha} + \sin^2\overline{\alpha}} \\
&= \overline{L}\sqrt{1 - \frac{v^2\cos^2\overline{\alpha}}{c^2}}
\end{aligned}$$

• Vinkelen mellom x-aksen og forbindelseslinjen fra Siv til Arne bestemmes dermed ved:

$$\tan\alpha = \frac{L_y}{L_x} = \frac{\gamma\overline{L}_y}{\overline{L}_x} = \gamma\tan\overline{\alpha}$$

• Vi må bestemme lyspulsens hastighet $\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$ målt i Sams inertialsystem. Vi bruker lorentztransformasjonene og finner:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(d\overline{x} + v\,d\overline{t})}{\gamma(d\overline{t} + (v/c^2)d\overline{x})} = \frac{\overline{u}_x + v}{1 + v\overline{u}_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\overline{y}}{\gamma(d\overline{t} + (v/c^2)d\overline{x})} = \frac{\overline{u}_y}{\gamma(1 + v\overline{u}_x/c^2)}$$

Sam måler dermed at lyspulsen sendes ut i retning gitt ved

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{u_y}{u_x} \\
&= \frac{\overline{u}_y}{\gamma(\overline{u}_x + v)} \\
&= \frac{c\sin\overline{\alpha}}{\gamma(c\cos\overline{\alpha} + v)} \\
&= \frac{\sin\overline{\alpha}}{\gamma(\cos\overline{\alpha} + v/c)}
\end{aligned}$$

• De to hendelsene er: 1) Siv sender ut lyspulsen, og 2) Arne mottar lyspulsen. La oss velge felles origo og $t = \overline{t} = 0$ for hendelse 1. Vi kan uten videre skrive ned koordinatene for hendelse 2 i $\overline{S}$:

$$\overline{x} = \overline{L}_x = \overline{L}\cos\overline{\alpha}$$

$$\overline{y} = \overline{L}_y = \overline{L}\sin\overline{\alpha}$$

$$\overline{t} = \frac{\overline{L}}{c}$$

Deretter bruker vi lorentztransformasjonene til å bestemme koordinatene for hendelse 2 i S:

$$\begin{aligned}
x &= \gamma(\overline{x} + v\overline{t}) = \gamma(\overline{L}\cos\overline{\alpha} + v\overline{L}/c) \\
t &= \gamma(\overline{t} + (v/c^2)\overline{x}) = \gamma(\overline{L}/c + (v/c^2)\overline{L}\cos\overline{\alpha})
\end{aligned}$$

Med gitte tallverdier $\overline{\alpha} = 45°$, $v = 0.9c$ og $\overline{L} = 20000$ m:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 10/\sqrt{19} \\
x &= \frac{10}{\sqrt{19}} \cdot (20000 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 20000 \cdot 0.9) = 73739\,\text{m} \\
t &= \frac{10}{\sqrt{19}} \cdot (\frac{20000}{3 \cdot 10^8} + \frac{0.9}{3 \cdot 10^8} \cdot 20000 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2.46 \cdot 10^{-4}\,\text{s}
\end{aligned}$$

Det tar altså 246 μs på Sams klokke fra Siv sender ut lyspulsen til den når fram til Arne. Til sammenligning tar det bare

$$\overline{t} = \frac{\overline{L}}{c} = 67\mu\text{s}$$

på klokkene til Siv og Arne.