Institutt for fysikk, NTNU
FY1002/TFY4160 Bølgefysikk
Høst 2006

Midtsemesterprøve Bølgefysikk
Tirsdag 31. oktober 2006 kl 1615 – 1800.

Løsningsforslag

Tillatte hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling. (Eller tilsvarende.)
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)
- Formelsamling i bølgefysikk er inkludert på baksiden av dette arket.

Opplysninger:

- Prøven består av 25 oppgaver. Hver oppgave har ett riktig og tre gale svaralternativ.
- Du *skal* krysse av for *ett* svaralternativ på *hver* oppgave. Avkryssing for *mer enn ett* alternativ eller *ingen* alternativ betraktes som *feil* svar og gir i begge tilfelle null poeng.
- Noen verdier: Tyngdens akselerasjon: $g = 9.8$ m/s^2, Lyshastigheten i vakuum: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, Boltzmanns konstant: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K, Avogadros tall: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$, Protonmassen: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.
- Symboler angis i kursiv (f.eks m for masse) mens enheter angis uten kursiv (f.eks m for meter). Vektorer angis med fete symboler. Enhetsvektorer angis med hatt over.
- SI-prefikser: G (giga) = 10^9, M (mega) = 10^6, k (kilo) = 10^3, c (centi) = 10^{-2}, m (milli) = 10^{-3}, μ (mikro) = 10^{-6}, n (nano) = 10^{-9}, p (piko) = 10^{-12}.
- Trigonometriske relasjoner:

$$A \sin(\alpha - \beta) + B \sin(\alpha + \beta) = (A + B) \sin\alpha \cos\beta - (A - B) \cos\alpha \sin\beta$$

Oppgaver

---

1) En kloss er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger med vinkelfrekvens ω. Ved et bestemt tidspunkt er fjæra strukket en lengde x_0 og klossens hastighet er da null. Hva er klossens maksimale hastighet?

A ωx_0

Kan løses på flere måter, f.eks. ved energibetraktning: Total energi ved angitt tidspunkt:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

Når klossen passerer likevektsposisjonen, er potensiell energi lik null, og dermed

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

som gir

$$v_{\max}^2 = \omega^2 x_0^2$$

---

2) En kloss med masse m er festet til ei fjær med fjærkonstant k og utfører dempede svingninger. Friksjonskraften er $b \cdot v$, der v er klossens hastighet og b er en dempingskonstant. Dersom vi har *svak* demping, vil klossen svinge fram og tilbake med periode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - b^2/4m^2}}$$

Hva blir da svingeperioden for kondensatorladningen q (og strømmen I) i en elektrisk krets bestående av en motstand R, en kapasitans C og en induktans L koblet i serie?
Oppgitt:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

D $T = (4\pi L/R)/\sqrt{L/CR^2 - 1}$

Den oppgitte ligningen,

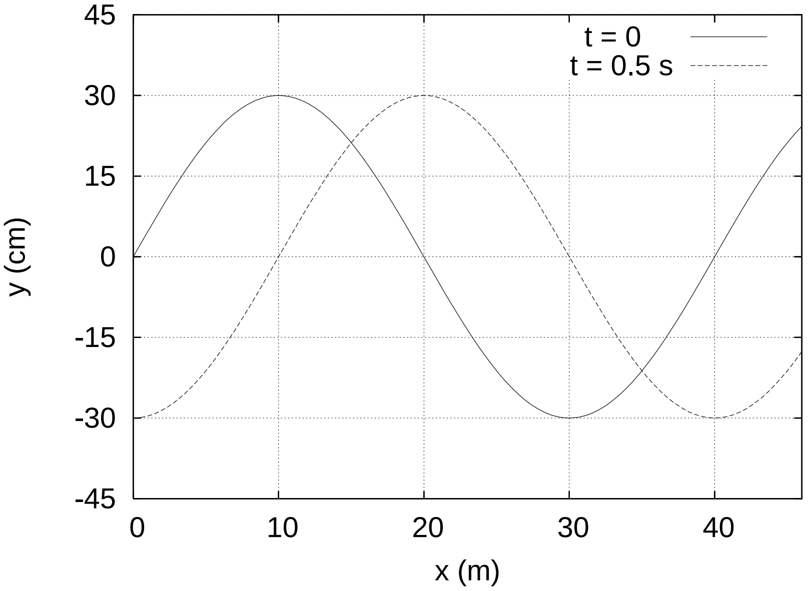
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

er på eksakt samme form som bevegelsesligningen for klossen,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Følgelig er m og L, b og R, og k og $1/C$ analoge størrelser i de to systemene, slik at svingeperioden må bli $T = 2\pi/\sqrt{1/LC - R^2/4L^2} = (4\pi L/R)/\sqrt{L/CR^2 - 1}$.

Figur 1:



Figur 1 gjelder oppgavene 3-8 og viser to øyeblikksbilder av (en del av) en harmonisk transversal bølge som forplanter seg i positiv x-retning på en streng.

---

3) Hva er bølgens amplitude?

B 30 cm

---

4) Hva er bølgens bølgelengde?

D 40 m

---

5) Hva er bølgehastigheten?

C 20 m/s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\,\mathrm{m}}{0.5\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Den kunne forsåvidt også ha vært f.eks. 50 m/0.5 s = 100 m/s ut fra figuren, men dette var jo ikke noe svaralternativ.

---

6) Hva er frekvensen?

A 0.5 Hz

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{40\,\mathrm{m}} = 0.5\,\mathrm{Hz}$$

---

7) Hva er strengelementenes maksimale hastighet?

D 94 cm/s

$$\begin{aligned} y &= y_0 \sin(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \dot{y} &= -\omega y_0 \cos(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \dot{y}_{\max} &= \omega y_0 = 2\pi \cdot 0.5 \cdot 30 \simeq 94\,\mathrm{cm/s} \end{aligned}$$

---

8) Bølgen kan beskrives ved funksjonen $y_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$. Hva er da fasekonstanten ϕ?

A $\phi = 0$

Vi ser fra figuren at

$$y(0,0) = 0 = -y_0 \sin\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

---

9) Hva er lydhastigheten i hydrogengass (H_2) ved romtemperatur (300 K)? Et hydrogenatom har ett proton i kjernen (og ingen nøytroner).

C 1317 m/s

Fra formelsamlingen:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}} \simeq 1317\,\mathrm{m/s}$$

---

10) En sommerdag synker plutselig temperaturen fra 300 K til 298 K. Hvor mye endres da lydhastigheten i lufta?

B -0.3 %

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} = a \cdot T^{1/2} \\ \Rightarrow \Delta v &= a \cdot \frac{1}{2} T^{-1/2} \cdot \Delta T = v \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} \\ \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} = \frac{-2}{2 \cdot 300} = \frac{-1}{300} = -0.3\% \end{aligned}$$

---

11) En liten høyttaler sender ut lydbølger med like stor intensitet i alle retninger. Dersom du måler et intensitetsnivå på 80 dB i en avstand 40 m fra høyttaleren, hva er da intensitetsnivået 5 m fra høyttaleren?

A   98 dB

$$\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A} \sim \frac{1}{r^2} \\
\Rightarrow \frac{I(5)}{I(40)} &= \left(\frac{40}{5}\right)^2 = 64 \\
80 &= 10\log\frac{I(40)}{I_0} \\
\Rightarrow I(40) &= I_0 10^8 \\
\Rightarrow I(5) &= 64 I_0 10^8 \\
\Rightarrow \beta &= 10\log\frac{64 I_0 10^8}{I_0} = 80 + 10\log 64 = 80 + 18 = 98\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

---

12) Den plane bølgen $\xi(\boldsymbol{r}, t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$ forplanter seg

B   i samme retning som $\boldsymbol{k}$.

---

13) Bølgen

$$\boldsymbol{D}(x, t) = D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) + 3D_0 \hat{z} \sin(kx - \omega t)$$

er

D   elliptiskpolarisert.

Vi ser at y-komponenten av $\boldsymbol{D}(x,t)$ er 90 grader forskjøvet i forhold til z-komponenten av $\boldsymbol{D}(x,t)$ for alle posisjoner x og tider t. Dessuten er amplituden i z-retning tre ganger så stor som i y-retning. Følgelig er bølgen elliptisk polarisert.

---

14) En gitarstreng med lengde 75 cm er festet i begge ender. Strekket i strengen er 150 N og massen er 7.2 g. Hva er frekvensen til strengens 2. harmoniske (dvs 2. laveste egenfrekvens)?

D   167 Hz

Grunntonen har bølgelengde $\lambda_1 = 2L$, 2. harmoniske $\lambda_2 = L$ og 3. harmoniske $\lambda_3 = 2L/3$. Bølgehastigheten på strengen er

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S \cdot L}{m}} = \sqrt{\frac{150 \cdot 0.75}{0.0072}} = 125\,\mathrm{m/s}$$

Frekvensen til 2. harmoniske blir dermed

$$\nu_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} \simeq 167\,\mathrm{Hz}$$

15) To biler kjører rett fra hverandre, bil nr 1 med hastighet 50 m/s og bil nr 2 med hastighet 5 m/s. Begge bilene er utstyrt med en sirene som genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 500 Hz. Det er vindstille, og været er ellers slik at lydhastigheten denne dagen er $v = 340$ m/s. Hvilken frekvens ν_1 måler bil nr 1 fra sirenen i bil nr 2, og hvilken frekvens ν_2 måler bil nr 2 fra sirenen i bil nr 1?

B $\nu_1 = 420$ Hz og $\nu_2 = 429$ Hz

Med bil nr 1 som observatør og sirenen i bil nr 2 som kilde:

$$\nu_1 = \frac{1 - 50/340}{1 + 5/340} \cdot 500\,\mathrm{Hz} = 420\,\mathrm{Hz}$$

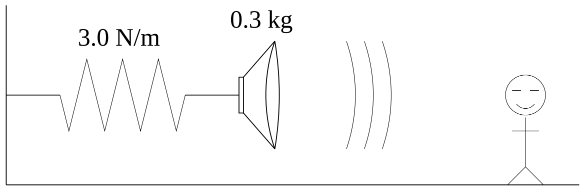
Med bil nr 2 som observatør og sirenen i bil nr 1 som kilde:

$$\nu_2 = \frac{1 - 5/340}{1 + 50/340} \cdot 500\,\mathrm{Hz} = 429\,\mathrm{Hz}$$

---

16) En høyttaler med masse 0.3 kg er festet til ei tilnærmet masseløs fjær med fjærkonstant 3.0 N/m. Høyttaleren svinger harmonisk med amplitude 0.15 m og sender samtidig ut en tone på 800 Hz. Hvis du står rett foran høyttaleren, vil du høre små variasjoner i tonens frekvens. Hva er forskjellen mellom største og minste frekvens du hører? Lydhastigheten er 340 m/s.

B 2.2 Hz



$$\omega = \sqrt{s/m} = \sqrt{10} = 3.16\,\mathrm{Hz}$$
$$\Rightarrow v_{\max} = \pm 3.16 \cdot 0.15 = \pm 0.474\,\mathrm{m/s}$$
$$\Rightarrow \nu = \frac{340 \cdot 800}{340 \pm 0.474}$$

som er hhv 801.1 Hz og 798.9 Hz, slik at forskjellen mellom minste og største frekvens blir 2.2 Hz.

17) Et uvær i Nordsjøen genererer østgående dønninger med bølgelengde 200 m. Bølgene beskrives av dispersjonsrelasjonen $\omega(k) = \sqrt{gk}$, der g er tyngdens akselerasjon og k er bølgetallet. Hvor lang tid tar det før dønningene når fram til Røst, 50 km lenger øst?

D ca $\pi/2$ timer

Bølgetoget går østover med hastighet lik gruppehastigheten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{4k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{8\pi}} \simeq 8.83\,\mathrm{m/s}$$

For å tilbakelegge distansen 50000 m bruker bølgene dermed en tid

$$t = \frac{50000}{8.83}\,\mathrm{s} \simeq 5662\,\mathrm{s} \simeq 1.57\,\mathrm{timer} \simeq \pi/2\,\mathrm{timer}$$

---

18) Sjokkbølgen fra et jagerfly som flyr horisontalt treffer deg 4.4 s etter at flyet passerte rett over deg. Lydhastigheten er 340 m/s, og flyets hastighet er 2.3 ganger så stor (dvs machtall = 2.3). I hvilken høyde flyr flyet?

B ca 1.7 km

Når sjokkbølgen treffer deg, danner linjen mellom deg og flyet en vinkel α gitt ved $\sin\alpha = v/v_s = 1/2.3$, dvs $\alpha \simeq 25.77°$. På denne tiden (dvs $t = 4.4$ s) har flyet tilbakelagt avstanden $v_s t = 2.3vt$ slik at $\tan\alpha = h/2.3vt$, dvs

$$h = 2.3vt\tan\alpha \simeq 2.3 \cdot 340 \cdot 4.4 \cdot \tan 25.77° \simeq 1.7\,\mathrm{km}$$

---

19) Et langt, tynt rør som er åpent i den ene enden og lukket i den andre skal brukes til å lage stående lydbølger med frekvens 250 Hz. Dette skal være rørets laveste resonansfrekvens (grunntonen). Hvor langt må da røret være? Lydhastigheten er 340 m/s.

A 34 cm

Grensebetingelsene som bestemmer bølgelengden til mulige stående bølger i et slik rør er at utsvinget ξ skal ha et knutepunkt i eventuelle lukkede ender og en buk i eventuelle åpne ender. (Alternativt: Trykkbølgen har knutepunkt i åpen ende og buk i lukket ende.) Uansett hvordan vi ønsker å tenke, finner vi at grunntonen tilsvarer en kvart bølgelengde inne i røret, dvs $\lambda_1 = 4L$. Dermed:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4L = \frac{v}{\nu_1} = \frac{340}{250} \\ \Rightarrow L &= \frac{340}{1000}\,\mathrm{m} = 34\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

---

20) Hva blir tredje laveste resonansfrekvens i røret i oppgave 19?

D 1250 Hz

Nest laveste resonansfrekvens i et slik rør tilsvarer at vi har 3 kvarte bølgelengder inne i røret. Tredje laveste resonansfrekvens tilsvarer at vi har 5 kvarte bølgelengder inne i røret. Følgelig er bølgelengden nå 1/5 av grunntonens bølgelengde, som betyr at frekvensen er 5 ganger så stor, dvs 1250 Hz.

---

21) Elektromagnetiske bølger forplanter seg i vakuum med hastighet

B $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ Her er ε_0 og μ_0 henholdsvis elektrisk permittivitet og magnetisk permeabilitet i vakuum.

Tallverdier for disse to konstantene er oppgitt i oppgaveteksten, så det er f.eks. bare å sette inn og prøve seg fram...

---

22) Sammenhengen mellom tallverdien til E og B i en elektromagnetisk bølge i vakuum er

B $E = Bc$

---

23) Himmelen er blå fordi

B utstrålt effekt fra oscillerende dipoler øker med frekvensen.

---

24) Lyshastigheten i et dielektrikum er

C mindre enn i vakuum.

---

25) Fra Maxwells ligninger kan man utlede at

A tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ og normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$

er kontinuerlige i grenseflaten mellom to dielektriske medier.

Institutt for fysikk
NTNU

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Midtsemesterprøve tirsdag 31. oktober 2006 kl 1615 – 1800.

Fasit

Oppgave	A	B	C	D
1	x			
2				x
3		x		
4				x
5			x	
6	x			
7				x
8	x			
9			x	
10		x		
11	x			
12		x		
13				x

Oppgave	A	B	C	D
14				x
15		x		
16		x		
17				x
18		x		
19	x			
20				x
21		x		
22		x		
23		x		
24			x	
25	x			