NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4160 BØLGEFYSIKK
Mandag 11. august 2008 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 6 oppgaver. Løsningsforslaget er på 7 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a)

• 1. overtones bølgelengde: $\lambda = L = 0.70$ m. Bølgehastigheten: $v = \lambda f = 0.70 \cdot 392$ m/s = 274.4 m/s. Vi har fra formelarket at $v = \sqrt{S/\mu}$, der μ er strengens masse pr lengdeenhet. For denne strengen:

$$\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi R^2 = 7800 \cdot \pi \cdot 0.00025^2 = 1.53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$$

Dermed blir strekk-krafta

$$S = \mu v^2 = 115\,\mathrm{N}$$

•

$$f_{\mathrm{O}} = \frac{1 - v_{\mathrm{O}}/v}{1 - v_{\mathrm{S}}/v}\,\nu_{\mathrm{S}} = \frac{1 - 10/340}{1 - (-25)/340} \cdot 196 = 177\ \mathrm{Hz}$$

b)

• Bølgetallsvektoren er $\boldsymbol{k} = k_x\,\hat{x} + k_y\,\hat{y}$. Med $t = 0$ og $y = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_x x$. Fra figuren ser vi at $k_x \cdot (2d/5) = 2\pi$, dvs $k_x = 5\pi/d$. Med $t = 0$ og $x = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_y y$. Fra figuren ser vi at $k_y \cdot (2d/3) = 2\pi$, dvs $k_y = 3\pi/d$. Dermed er

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\pi}{d}\sqrt{5^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{34}\pi}{d}$$

slik at bølgelengden blir

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2d}{\sqrt{34}} \simeq 13.7\,\mathrm{cm}$$

• Bølgens forplantningsretning er sammenfallende med $\boldsymbol{k}$. Dermed:

$$\tan\theta = \frac{k_y}{k_x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq 31^\circ$$

• Vi har $v = \lambda\nu = 13.7\,\mathrm{cm} \cdot 108\,\mathrm{s}^{-1} = 14.8\,\mathrm{m/s}$. Med forplantning i retning $\theta = 31^\circ$ i forhold til x-aksen har vi da $v_x = v\cos\theta \simeq 12.7$ m/s og $v_y = v\sin\theta \simeq 7.6$ m/s.

OPPGAVE 2

La oss anta at molekylet ligger langs x-aksen, med massen m til høyre for massen M, slik at $x > X$. Fjærkraften er $k((x - X) - (x_0 - X_0))$, der uttrykket i parentes er strekket i eller sammenpressingen av fjæra. Hvis fjæra er strukket, dvs $x - X > x_0 - X_0$, virker det en positiv kraft på M og en negativ kraft på m. Hvis fjæra er sammenpresset, blir det omvendt. Newtons 2. lov gir dermed:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= k\,(x - X - x_0 + X_0) \\ m\ddot{x} &= -k\,(x - X - x_0 + X_0) \end{aligned}$$

Vi følger tipset i oppgaveteksten og innfører $\Xi = X - X_0$ og $\xi = x - x_0$. Dermed:

$$\begin{aligned} M\ddot{\Xi} &= k\xi - k\Xi \\ m\ddot{\xi} &= -k\xi + k\Xi \end{aligned}$$

Innsetting av $\Xi = A\cos\omega t$ og $\xi = B\cos\omega t$ gir

$$\begin{aligned} -M\omega^2 A &= kB - kA \\ -m\omega^2 B &= -kB + kA \end{aligned}$$

Addisjon av disse to ligningene gir

$$-\omega^2(MA + mB) = 0$$

dvs

$$A/B = -m/M$$

som besvarer siste del av oppgaven. Innsetting av $B = -AM/m$ i (f.eks.) den siste av de to ligningene ovenfor gir

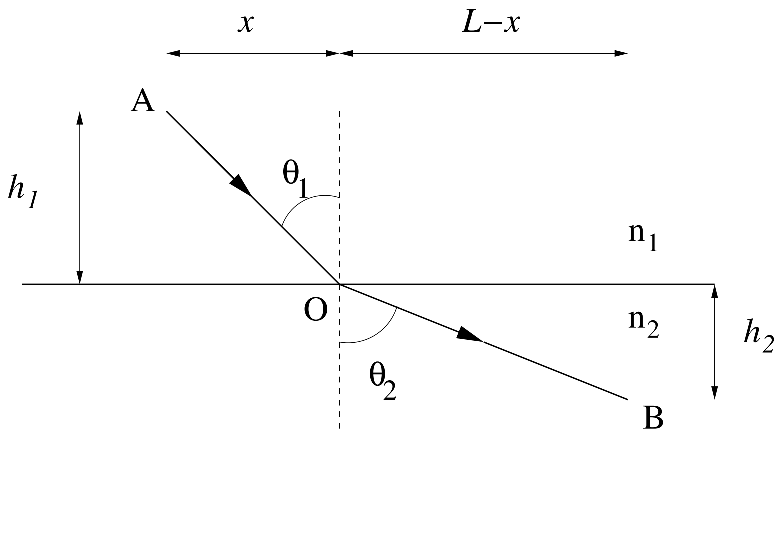
$$M\omega^2 A = kAM/m + kA$$

dvs

$$\omega^2 = k\frac{M/m + 1}{M} = k\frac{M + m}{mM} = k/\mu$$

som besvarer første del av oppgaven.

OPPGAVE 3



Fermats prinsipp og brytning

Fermats prinsipp og brytning:

Hastighet i medium 1 er v_1 og i medium 2 v_2. Tidsforbruk fra A via O til B blir da

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}{v_2}$$

Finner minimal tid ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{2(L-x)}{v_2\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}} = 0$$

Vi ser fra figuren at

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$$

mens

$$\sin\theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}$$

Dermed har vi uten videre

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

siden $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$.

OPPGAVE 4

• Vi velger oss to punkter $\boldsymbol{r}_1$ og $\boldsymbol{r}_2$ som ligger i samme bølgefront. Det elektriske feltet må være det samme i disse punktene. Da følger det at

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = 0$$

dvs

$$\boldsymbol{k} \perp (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

Bølgens forplantningsretning er normalt til bølgefronten, og vektoren $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ er parallell med bølgefronten. Da følger det at bølgen forplanter seg i retningen gitt ved $\boldsymbol{k}$. (Vi kunne selvsagt ha benyttet presis samme argumentasjon med utgangspunkt i magnetfeltvektoren $\boldsymbol{B}$.)

• Differensialformen av Gauss' lover i vakuum, $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ og $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, gir, for den oppgitte elektromagnetiske bølgen $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ og $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Dermed har vi $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$, så bølgen er transversal.

• Differensialformen av Faraday–Henrys lov, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ gir, for den oppgitte elektromagnetiske bølgen

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}$$

Fra forrige punkt vet vi at elektromagnetiske bølger er transversale. Dermed må de tre vektorene $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ alle stå normalt på hverandre.

OPPGAVE 5

• Disse bølgene forplanter seg i positiv z-retning.

• Her er det bare å legge sammen $\boldsymbol{E}_+$ og $\boldsymbol{E}_-$ og se hva en får:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- &= E_0\hat{x}\sin(kz-\omega t) + E_0\hat{y}\cos(kz-\omega t)\\ &+ E_0\hat{x}\sin(kz-\omega t) - E_0\hat{y}\cos(kz-\omega t)\\ &= 2E_0\hat{x}\sin(kz-\omega t)\end{aligned}$$

som jo nettopp er en lineærpolarisert bølge polarisert i x-retning.

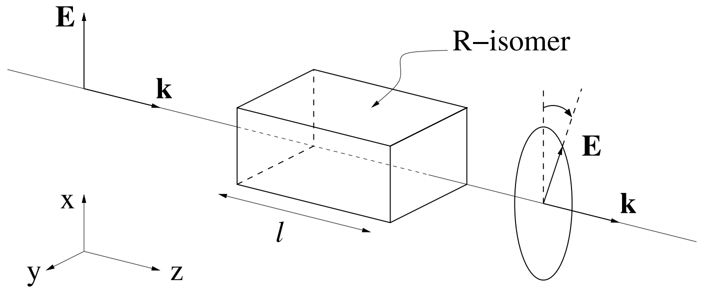
• Gjennom et medium med brytningsindeks n forplanter en elektromagnetisk bølge seg med hastighet $v = c/n$. Dermed:

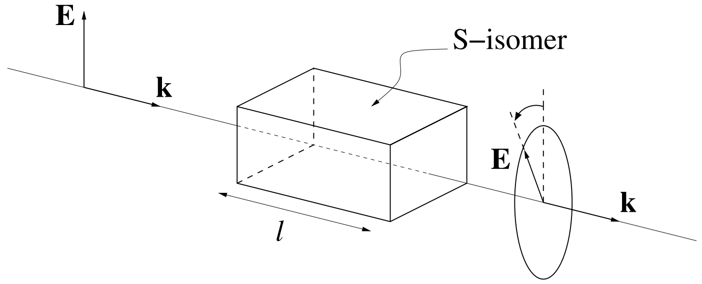
$$\Delta t = t_+ - t_- = L/v_+ - L/v_- = \frac{L}{c}(n_+ - n_-) = \frac{L\Delta n}{c}$$

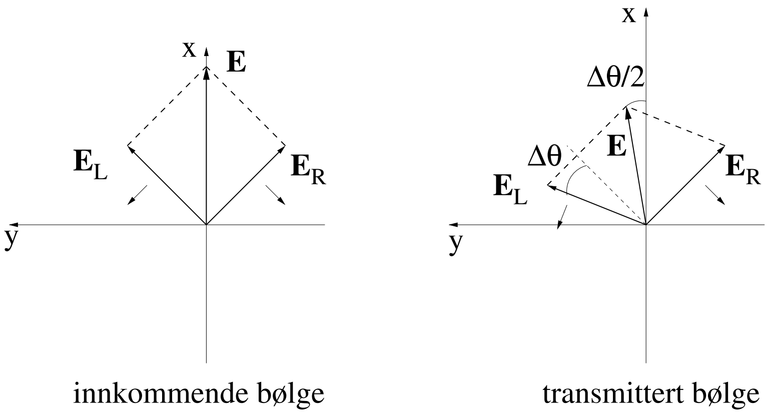
• Tidsforskjellen Δt tilsvarer en opparbeidet faseforskjell $\Delta\theta$ mellom de to sirkulærpolariserte delbølgene, gitt ved

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = ck\Delta t = c\frac{2\pi}{\lambda}\Delta t = \frac{2\pi L\Delta n}{\lambda}$$

Den transmitterte bølgen er følgelig fremdeles en lineærpolarisert bølge, der polarisasjonsretningen ikke lenger er langs x, men rotert en vinkel $\Delta\theta/2$ i forhold til x-aksen (som vi skal se nedenfor).







Vi skal nå se at dersom $\boldsymbol{E}_+$ og $\boldsymbol{E}_-$ har opparbeidet en innbyrdes faseforskjell $\Delta\theta$ ved transmisjon gjennom mediet, så har polarisasjonsplanet til $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$ rotert en vinkel $\Delta\theta/2$. Vi bruker trigonometriske relasjoner for summer av sinuser og cosinuser:

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) + \sin(a+b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b + \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
&= 2 \sin a \cos b \\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
&= 2 \sin a \sin b
\end{aligned}$$

Her har vi, for den transmitterte bølgen $\boldsymbol{E}_t$, med $\beta \equiv kz - \omega t - \Delta\theta/2$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_t &= E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t - \Delta\theta) + E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t - \Delta\theta) \\
&+ E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) - E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \\
&= E_0 \hat{x} \sin(\beta - \Delta\theta/2) + E_0 \hat{y} \cos(\beta - \Delta\theta/2) \\
&+ E_0 \hat{x} \sin(\beta + \Delta\theta/2) - E_0 \hat{y} \cos(\beta + \Delta\theta/2) \\
&= 2E_0 \hat{x} \sin\beta \cos(\Delta\theta/2) + 2E_0 \hat{y} \sin\beta \sin(\Delta\theta/2) \\
&= 2E_0 \sin(kz - \omega t - \Delta\theta/2) \left(\hat{x} \cos(\Delta\theta/2) + \hat{y} \sin(\Delta\theta/2)\right)
\end{aligned}$$

Dette er en lineærpolarisert bølge der polarisasjonsretningen danner en vinkel

$$\Delta\alpha = \Delta\theta/2 = \frac{\pi L \Delta n}{\lambda}$$

med x-aksen.
Tallverdi:

$$\Delta\alpha = \frac{\pi \cdot 0.50 \cdot 4.0 \cdot 10^{-9}}{628 \cdot 10^{-9}} = 0.01$$

dvs radianer.

OPPGAVE 6

• Her kjenner vi altså $v_{AB} = u$ og $v_{BC} = v$, og vi søker et uttrykk for $v_{AC} = w$. Vi lar system C tilsvare system S, dvs umerkede symboler for tid og posisjon, mens vi lar system B tilsvare system S', dvs merkede symboler for tid og posisjon. Da har vi $w = dx/dt$ og $u = dx'/dt'$, mens lorentztransformasjonene for rom og tid knytter disse sammen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx/c^2)} \\ &= \frac{dx/dt - v}{1 - v(dx/dt)/c^2} \\ &= \frac{u - v}{1 - vw/c^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Denne kan vi løse med hensyn på w:

$$w = v_{AC} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

• Med Einstein:

$$v_{AC} = \frac{c/2 + c/3}{1 + 1/6} = 5c/7$$

Med Galileo:

$$v_{AC} = c/2 + c/3 = 5c/6$$

som representerer en feil på

$$\frac{5c/6 - 5c/7}{5c/7} = 7/6 - 1 = 1/6 \simeq 17\%$$