

RETTESNOR VED SENSOR AV EKSAMEN I FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Fredag 5. desember 2008 kl. 0900 - 1300

OPPGAVE 1 [telte 20 %, dvs 10 flervalgsoppgaver som telte 2% hver]

- | | |
|------|------|
| a) A | f) A |
| b) C | g) B |
| c) D | h) B |
| d) D | i) C |
| e) A | j) B |
-

OPPGAVE 2 [telte 30 %, dvs **a**, **b**, **c** og **d** telte 7.5 % hver]

a)

$y(x - (b/a)t) \Rightarrow$ positiv x -retning

ax og bt dimensjonsløse $\Rightarrow$ $[a] = \text{m}^{-1}$ og $[b] = \text{s}^{-1}$

$v = b/a$

$v = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow$ $S = v^2\mu = b^2\mu/a^2$

b)

$$\begin{aligned}\exp(-2a^2x^2) &= 1/2 \Rightarrow 2a^2x^2 = \ln 2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \\ \Rightarrow \Delta x &= \underline{\underline{\frac{2}{a} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{a} \sqrt{\ln 4}}}\end{aligned}$$

c) Total energi:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \mu v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Her er $\partial y / \partial x = -2a^2xy_0 \exp(-a^2x^2)$ slik at (med $v^2 = b^2/a^2$)

$$E = 4a^2b^2\mu y_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-2a^2x^2) dx$$

Substituerer $\beta = \sqrt{2}ax$. Da er $x^2 dx = \beta^2 d\beta / 2\sqrt{2}a^3$, så vi får

$$E = \frac{4a^2b^2\mu y_0^2}{2\sqrt{2}a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi/2} b^2 \mu y_0^2}{a}}}$$

Enhet: $\text{s}^{-2} \cdot (\text{kg}/\text{m}) \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m} = \text{J}$

d) Total impuls:

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x) dx$$

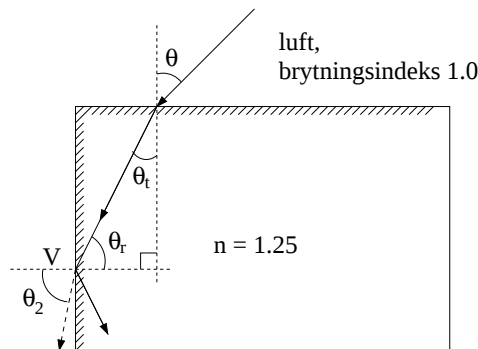
med impuls π pr lengdeenhet,

$$\pi(x, t) = \mu \left(1 - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t}$$

Her er det to ledd, og det første (dvs 1-eren inne i parentesen) vil gi null bidrag siden vi ved å derivere $y(x, t)$ en gang mhp t , ender opp med en integrand som er på samme form som det oppgitte integralet som er lik null. Det andre leddet vil gi samme type integral som vi hadde i uttrykket for energien E . Forskjellen består i at en derivasjon mhp x er byttet ut med en derivasjon mhp t , samt et fortegn og en faktor v^{-2} . Alt i alt resulterer dette i at $p = E/v$, så vi kan skrive ned direkte

$$p = E/v = Ea/b = \sqrt{\pi/2} b \mu y_0^2$$

OPPGAVE 3 [telte 15%]



Fra figur: $\theta_t = \pi/2 - \theta_r$. Snells lov gir:

$$\sin \theta = n \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_2 = n \sin \theta_r$$

Dersom θ_r gir $\theta_2 > \pi/2$, har vi total refleksjon. Grensetilfellet $\theta_2 = \pi/2$:

$$\sin \theta_r = 1/n$$

som gir

$$\sin \theta = n \sin \theta_t = n \sin(\pi/2 - \theta_r) = n \cos \theta_r = n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} = n \sqrt{1 - n^{-2}} = \sqrt{n^2 - 1}$$

Med $n = 1.25$ finner vi $\theta \underline{\simeq} 48.6 \underline{\simeq} 49$ grader. som er *største* verdi for θ som gir total refleksjon i venstre grenseflate.

OPPGAVE 4 [telte 15%]

Kan skrive ned:

$$E(t) = A \cos \Omega t + \alpha \cos(\Omega + \omega)t + \alpha \cos(\Omega - \omega)t$$

i antennens posisjon $x = 0$. Bruker

$$\cos(\Omega + \omega)t + \cos(\Omega - \omega)t = 2 \cos \Omega t \cdot \cos \omega t$$

og finner

$$E(t) = A \cos \Omega t \left[1 + \frac{2\alpha}{A} \cos \omega t \right]$$

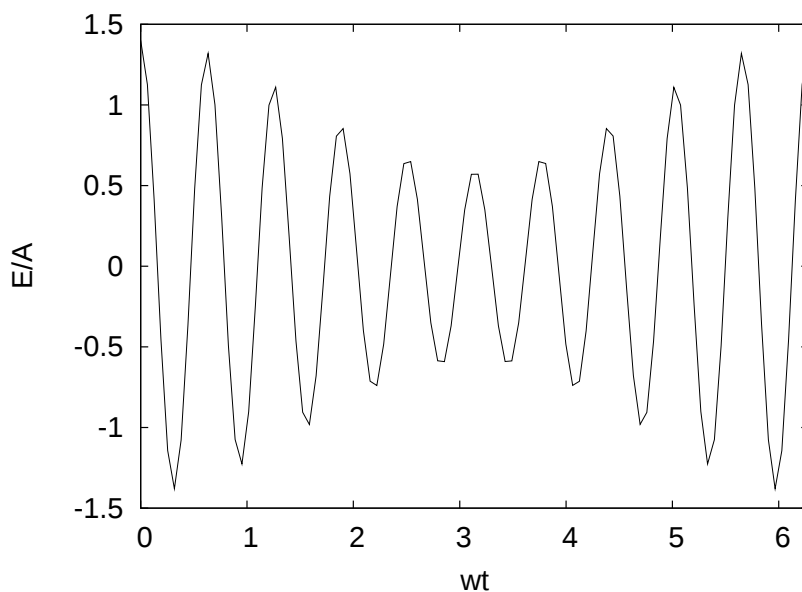
Med andre ord er modulasjonsbølgen

$$M(t) = \underline{\frac{2\alpha}{A} \cos \omega t}$$

Med $\alpha/A = 0.2$ og $\omega/\Omega = 0.1$ har vi

$$E(t)/A = \cos 10\omega t [1 + 0.4 \cos \omega t]$$

Skisse:



OPPGAVE 5 [telte 20 %, dvs **a** og **b** telte 10% hver]

a)

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

f måles av observatør med hastighet v bort fra kilde som ”kringkaster” frekvensen f_0 . ($\beta = v/c$).
 $v_{CB} = v$, som gir

$$f_{CB} = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$
$$v_{CA} = \frac{v_{CB} + v_{BA}}{1 + v_{CB}v_{BA}/c^2} = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2v}{1 + \beta^2}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} f_{CA} &= f_0 \sqrt{\frac{1 - v_{CA}/c}{1 + v_{CA}/c}} \\ &= f_0 \sqrt{\frac{1 - 2\beta/(1 + \beta^2)}{1 + 2\beta/(1 + \beta^2)}} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2 - 2\beta}{1 + \beta^2 + 2\beta}} \\ &= f_0 \cdot \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \end{aligned}$$

$v \ll c$ og $\beta \ll 1$ gir til ledende orden i β :

$$\begin{aligned} f_{CB} &\simeq f_0(1 - \beta) \\ f_{CA} &\simeq f_0(1 - 2\beta) \end{aligned}$$

som gir differansen

$$f_{CB} - f_{CA} \simeq \beta f_0 = \frac{v}{c} f_0$$

b) Prinsippene om bevaring av impuls og energi må brukes her.

Total energi initielt:

$$E = M_0 c^2$$

Etter:

Fotonenes energi:

$$E_f = pc$$

Rakettens energi:

$$E_r = \sqrt{(pc)^2 + (M_1 c^2)^2}$$

Energibevarelse gir:

$$M_0 c^2 = E_f + E_r = pc + \sqrt{(pc)^2 + (M_1 c^2)^2}$$

Løses med hensyn på p , eventuelt med hensyn på pc :

$$pc = \frac{(M_0c^2)^2 - (M_1c^2)^2}{2M_0c^2}$$

Bruker deretter

$$p = \gamma M_1 v$$

som gir

$$v^2 = \frac{p^2}{M_1^2 \gamma^2} = \frac{p^2}{M_1^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Løses med hensyn på v^2 , evt v^2/c^2 :

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(1 + \frac{(M_1c^2)^2}{(pc)^2}\right)^{-1}$$

Setter inn for pc , og finner:

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1 - (M_1/M_0)^2}{1 + (M_1/M_0)^2}\right)^2$$

Med andre ord:

$$v = c \cdot \frac{1 - (M_1/M_0)^2}{1 + (M_1/M_0)^2}$$

Dersom $M_1 = M_0/2$, får vi

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

I grensen $M_1 \rightarrow 0$ ser vi at $v \rightarrow c$, som er rimelig: Masseløse objekter beveger seg med hastighet c .