NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Torsdag 3. desember 2009 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

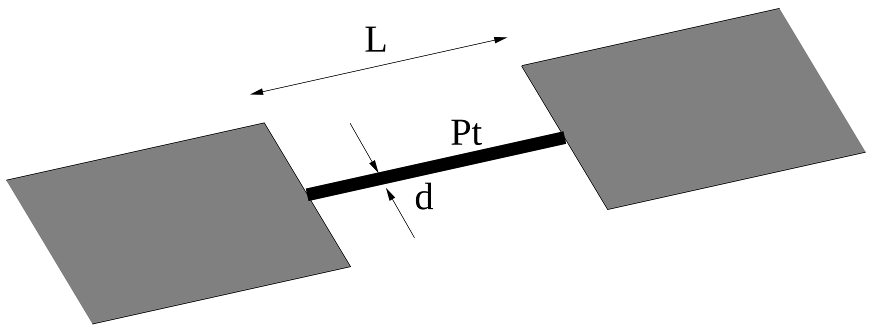
Side 2 – 6: Oppgaver
Side 7 – 15: Formelsamling

Prøven består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene normalt vil telle under vurderingen. De prosentvise tallene summerer seg opp til 100 %. Hele denne prøven teller 80 % på sluttkarakteren. De resterende 20 % utgjøres av midtsemesterprøven som ble avholdt tidligere i høst.

Sensuren kommer senest 3. januar 2010.

OPPGAVE 1 [teller 25 %]

Bruk SI-enheter og 3 gjeldende siffer for tallsvarene i denne oppgaven.



Moderne teknologi gjør det mulig å lage meget tynne og korte strenger. Et eksempel rapporteres i Applied Physics Letters **83**, side 1240 (2003). Her er en platinastreng med lengde $L = 1.30\,\mu$m og diameter $d = 2R = 43.0$ nm fastspent i begge ender. Platina har massetetthet $\rho = 21.1$ g/cm^3. En nøyaktig analyse av vibrasjoner på en slik "faststoffstreng" er litt komplisert. Her skal vi ganske enkelt anta en strekk-kraft $S = 2.28\,\mu$N og studere harmoniske transversale stående bølger på strengen, som er festet i $x = 0$ og $x = L$, med utsving i y-retningen.

a) Bestem platinastrengens masse M og dens masse μ pr lengdeenhet. Hva blir bølgehastigheten v for transversale bølger på en slik streng?

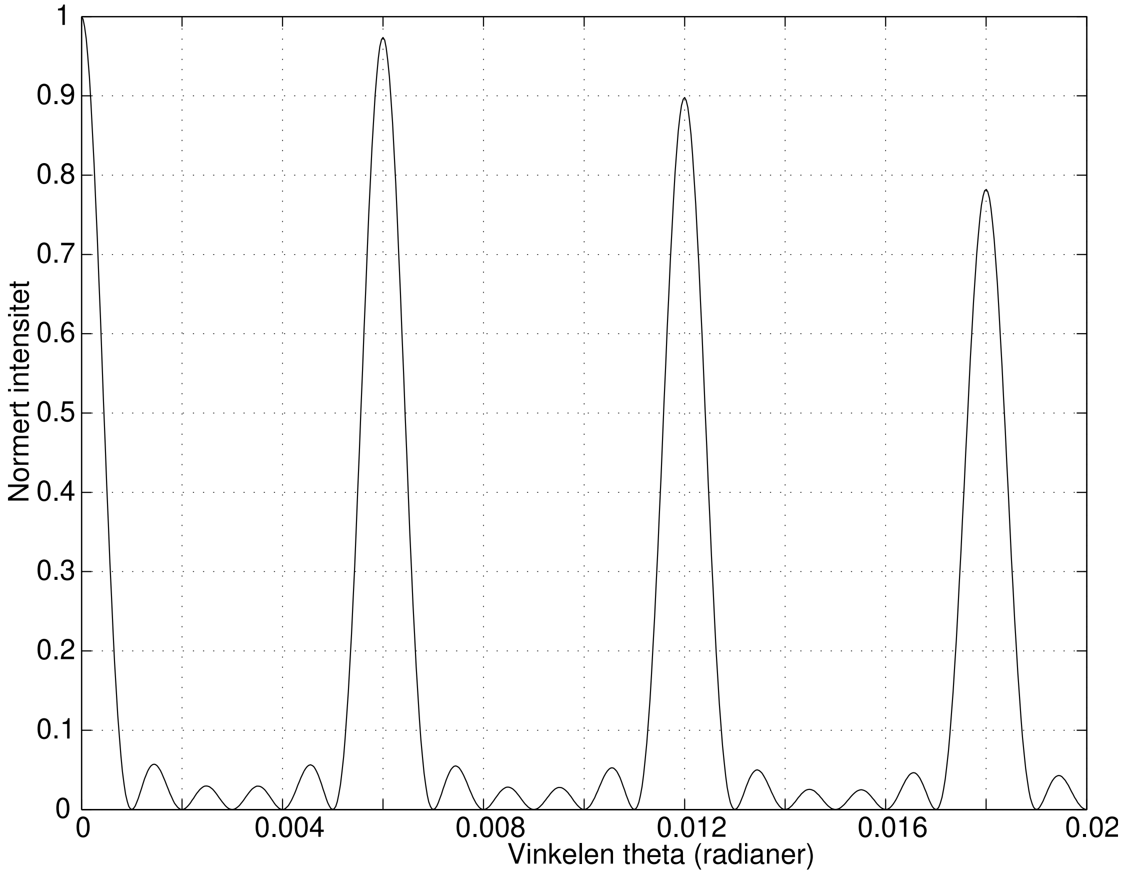
b) Vis at en superposisjon av en høyre- og en venstregående bølge, henholdsvis $y_1(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ og $y_2(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$, blir en stående bølge

$$y(x,t) = A(x) \cos \omega t.$$

Bestem derved den posisjonsavhengige "amplitudefunksjonen" $A(x)$, og bruk grensebetingelsene $y(0,t) = y(L,t) = 0$ til å fastlegge bølgetall k_n, bølgelengder λ_n og tilhørende resonansfrekvenser f_n for stående bølger på strengen ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Både uttrykk og tallverdier skal bestemmes.

c) I eksperimentet vibrerer nanostrengen i den "fundamentale moden", dvs med den laveste resonansfrekvensen f_1. Maksimalt utsving på strengen ble anslått til 1 nm. Skisser utsvinget $y(x,t)$ ved de tre tidspunktene 0, $T_1/4$ og $T_1/2$. (Her er T_1 perioden.) Bestem strengens totale mekaniske energi E. Vi velger her nullnivå for potensiell energi når $y = 0$. (Tips: $E = E_k^{\max}$, eventuelt $E = E_p^{\max}$.)

OPPGAVE 2 [teller 15 %]



a) Figuren over viser normert intensitetsfordeling $I(\theta)$ for laserlys som har passert gjennom N parallelle spalter med spaltebredde a og spalteavstand d. Av symmetrigrunner er $I(-\theta) = I(\theta)$. Laserens bølgelengde er $\lambda = 600$ nm. Bruk figuren til å bestemme N, a og d.

b) Vis at halvverdibredden $\Delta\theta \simeq (\theta_+ - \theta_-)/2$ til nullte ordens hovedmaksimum avtar proporsjonalt med antall spalter N,

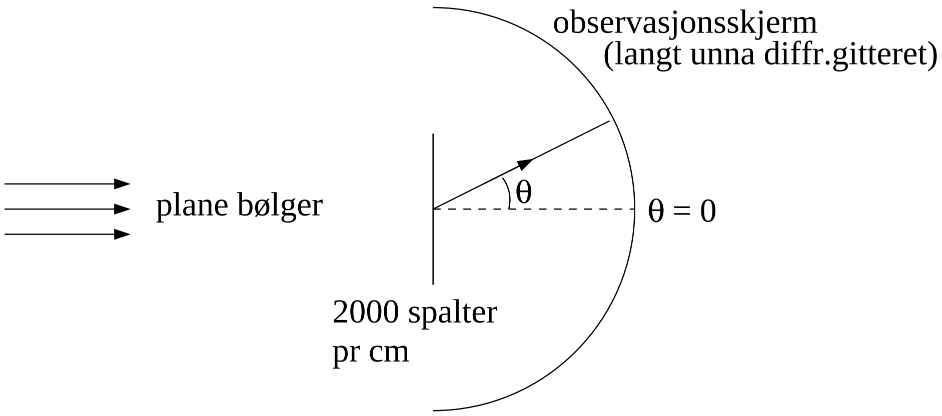
$$\Delta\theta \simeq \frac{\alpha}{N},$$

og fastlegg derved (den dimensjonsløse) størrelsen α. Her er $\theta_+ > 0$ og $\theta_- < 0$ de to vinklene som gir første nullpunkt på hver sin side av nullte ordens maksimum ved $\theta = 0$. Sett inn tallverdier i uttrykket for $\Delta\theta$ og sammenlign med halvverdibredden som du finner ved å lese av i figuren.

Oppgitt: $\sin x \simeq x - x^3/6$ og $\arcsin x \simeq x$ når $x \ll 1$.

OPPGAVE 3 [teller 15%]

Elektromagnetisk stråling fra en glødelampe sendes inn mot et diffraksjonsgitter med 2000 (meget smale) spalter pr cm. Strålingen inneholder alle bølgelengder i den synlige delen av spektret (som her antas å ligge mellom 400 og 700 nm), samt ultrafiolett (UV) stråling ned mot 200 nm og infrarød (IR) stråling opp mot flere tusen nm. Vi antar at bølger med en gitt bølgelengde er koherente etter at de har passert diffraksjonsgitteret.



a) Hva er diffraksjonsgitterets spalteavstand d?

b) Hva slags lys ser du på observasjonsskjermen i nullte ordens maksimum (dvs ved $\theta = 0$)?

c) Hvilket vinkelområde $(\theta_1^{\text{min}}, \theta_1^{\text{max}})$ spenner synlig lys over i 1. ordens maksimum? Forklar hva du ser mellom θ_1^{min} og θ_1^{max}.

d) Synlig lys i 1. orden overlapper ikke med synlig lys i høyere ordner. Finn ut i hvilken grad 2. ordens maksimum overlapper med høyere ordner i det synlige området. Angi hvilke ordner, og i hvert tilfelle hvilket vinkelområde.

[Med *maksima* menes i denne oppgaven *hovedmaksima*. Sekundære maksima er uten betydning pga det store antallet spalter i diffraksjonsgitteret.]

OPPGAVE 4 [teller 15%]

I denne oppgaven ser vi på tyngdebølger i grenseflaten mellom luft og vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kd)}.$$

Her er k bølgetallet, g tyngdens akselerasjon og d vannets dybde.

a) Finn et uttrykk for fasehastigheten v. Skisser v som funksjon av den dimensjonsløse størrelsen kd. Hva slags bølger beveger seg raskest, de langbølgede eller de kortbølgede? Hva blir maksimal bølgehastighet for en gitt dybde d?

b) Finn et uttrykk for dybden d, nærmere bestemt d uttrykt ved v, g og bølgelengden λ. Hvis du observerer at bølger med bølgelengde 2 m beveger seg med hastighet 1.7 m/s, hvor dypt er vannet da? (Bruk $g = 9.8$ m/s^2.)

Oppgitt:

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = (1 - \exp(-2x))/(1 + \exp(-2x))$$

$$\tanh x \simeq x - x^3/3 \quad \text{for} \quad x \ll 1$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2 \quad \text{for} \quad x \ll 1$$

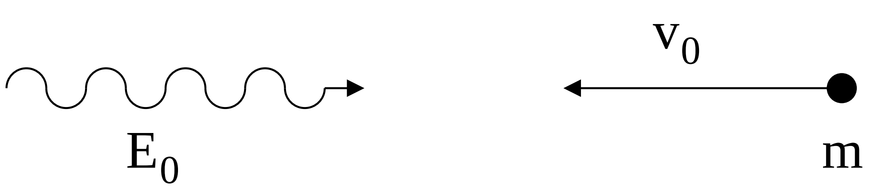
OPPGAVE 5 [teller 10 %]

En ideell gass bestående av toatomige molekyler presses sammen under adiabatiske forhold (dvs uten varmeutveksling med omgivelsene) slik at trykket øker til det dobbelte. Med hvilken faktor øker da lydhastigheten i gassen?

OPPGAVE 6 [teller 20 %]

All bevegelse foregår langs en rett linje i denne oppgaven. Alle svar kan uttrykkes ved de kjente størrelsene E_0 og m, samt lyshastigheten c.

Et (masseløst) foton med energi E_0 kolliderer med en partikkel med masse m:



a) Hvor stor hastighet v_0 må partikkelen ha før kollisjonen for at fotonet fortsatt skal ha energien E_0 etter kollisjonen?

b) Hva er partikkelens hastighet v_1 etter kollisjonen?

c) Hva er systemets totale impuls p og energi E?

d) I punktene $a - c$ ovenfor er alle størrelser målt i labsystemet. Hva er fotonets hastighet målt i partikkelens hvilesystem S_0 før kollisjonen? Enn i partikkelens hvilesystem S_1 etter kollisjonen?

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

  Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v} \, \nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned} \Delta D_\perp &= 0 \\ \Delta E_\parallel &= 0 \\ \Delta B_\perp &= 0 \\ \Delta H_\parallel &= 0 \end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter, spaltebredde a, spalteavstand d:

$$I(\theta) = \hat{I}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \gamma\left(x - vt\right)\\ \overline{y} &= y\\ \overline{z} &= z\\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \gamma\left(\overline{x} + v\overline{t}\right)\\ y &= \overline{y}\\ z &= \overline{z}\\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right)\end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\overline{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.

GOD JUL!