NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET, INSTITUTT FOR FYSIKK

Utarbeidet av: Jon Andreas Støvneng (jon.stovneng@ntnu.no)

LØSNINGSFORSLAG (7 SIDER) TIL EKSAMEN I FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Torsdag 3. desember 2009 kl. 0900 - 1300

OPPGAVE 1 [telte 25 %]

a) Strengens masse:

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 L = 21.1 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (21.5 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 1.30 \cdot 10^{-6} = 3.98 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$$

Strengens masse pr lengdeenhet:

$$\mu = M/L = 3.98 \cdot 10^{-17}/1.30 \cdot 10^{-6} = 3.06 \cdot 10^{-11} \text{ kg/m}$$

Bølgehastigheten for transversale bølger på strengen:

$$v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{2.28 \cdot 10^{-6}/3.06 \cdot 10^{-11}} = 273 \text{ m/s}$$

b) Totalt utsving:

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\
&= y_0[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \\
&= y_0[\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t] \\
&= 2y_0 \sin kx \cos \omega t
\end{aligned}$$

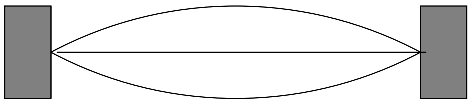
Den posisjonsavhengige amplitudefunksjonen er dermed

$$A(x) = 2y_0 \sin kx$$

Grensebetingelsen $y(L,t) = 0$ betyr at $\sin kL = 0$, dvs $kL = n\pi$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Stående bølger på strengen har derfor henholdsvis bølgetall, bølgelengder og resonansfrekvenser

$$\begin{aligned}
k_n &= n\pi/L = n \cdot 2.42 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \\
\lambda_n &= 2\pi/k_n = 2L/n = (2.60 \cdot 10^{-6}/n) \text{ m} \\
f_n &= v/\lambda_n = nv/2L = n \cdot \sqrt{S/\mu}/2L = n \cdot 105 \text{ MHz}
\end{aligned}$$

c) Strengens utsving ved tidspunktene 0, $T_1/4$ og $T_1/2$:



Ved $t = T_1/4$ er $\omega_1 t = \pi/2$, utsvinget er $y = 0$ på hele strengen, potensiell energi er $E_p = 0$, og total energi er

$$E = E_k^{\max}.$$

Hastigheten til et masseelement dm i posisjon x er

$$dy/dt = -A(x)\omega \sin \omega t$$

som ved $t = T_1/4$ blir

$$-2y_0\omega \sin kx.$$

Den kinetiske energien til dette masseelementet er derfor

$$dE_k^{\max} = \frac{1}{2}dm\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu dx \cdot 4y_0^2\omega^2 \sin^2 kx.$$

Total maksimal kinetisk energi, og derved total mekanisk energi E, må være integralet av dette uttrykket, fra $x = 0$ til $x = L$. Vi betrakter her "grunntonen", med frekvens $f_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$, slik at $\omega^2 = 4\pi^2 f_1^2 = \pi^2 S/ML$. Dermed:

$$E = \int dE_k^{\max} = 2\mu y_0^2\pi^2(S/ML)\int_0^L \sin^2(k_1 x)dx.$$

Integralet her er en "gammel traver". Siden

$$\int_0^L (\sin^2(k_1x) + \cos^2(k_1x))dx = \int_0^L dx = L,$$

må vi ha

$$\int_0^L \sin^2(k_1x)dx = L/2,$$

ettersom vi integrerer over en hel periode av $\sin^2(k_1x) = \sin^2(\pi x/L)$. Alt i alt:

$$E = 2(M/L)y_0^2\pi^2(S/ML)(L/2) = y_0^2\pi^2 S/L = 4.33 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Alternative uttrykk for E:

$$E = \mu L y_0^2\omega_1^2 = My_0^2\omega_1^2.$$

Kommentar 1: Til tross for at oppgaveteksten uttrykkelig bad om SI–enheter, er det her meget fristende, siden 1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J, å regne om sluttsvaret til elektronvolt:

$$E = 27 \text{ eV}.$$

En kvantekjemiker ville nå ikke nøle med å ta skrittet fullt ut og konkludere med at

$$E \simeq 1 \text{ hartree},$$

siden 1 hartree (eventuelt 1 a u, dvs 1 ”atomic unit”) er energienheten som tilsvarer det dobbelte av bindingsenergien til det ene elektronet i hydrogenatomet, nærmere bestemt $2 \cdot 13.6$ eV $= 27.2$ eV. Det var dagens lille leksjon om kjente og kjære enheter for energi.

Kommentar 2: Som nevnt i oppgaveteksten er beskrivelsen av vibrasjoner på slike ”bjelker” egentlig litt mer komplisert enn som så, og den som sjekker referansen gitt i oppgaveteksten, vil finne et uttrykk for ”grunntonefrekvensen” som inneholder Youngs modul (elastisitetsmodulen) snarere enn strekk-kraften. Men det vil da også framgå at ”standardteorien” for transversale svingninger på *makroskopiske* bjelker ikke ser ut til å fungere helt godt for slike ”nanobjelker”. Derfor slår vi oss til ro med den forenklede beskrivelsen der nanobjelken betraktes som en nano-*streng*.

OPPGAVE 2 [telte 15 %]

a) Intensitetsfordelingen for N spalter med endelig bredde a og spalteavstand d er

$$I \sim \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\phi}{\sin\phi}\right)^2,$$

med

$$\beta = \pi a \sin(\theta)/\lambda \quad , \quad \phi = \pi d \sin(\theta)/\lambda.$$

Det er telleren $\sin N\phi$ som fastlegger nullpunktene mellom to hovedmaksima, mens nullpunkter i nevneren, $\sin\phi$, gir fordelingens hovedmaksima. Første ordens hovedmaksimum tilsvarer $\phi = \pi$. Med start i $\phi = 0$, dvs $\theta = 0$, ser vi at telleren $\sin N\phi$ har 5 nullpunkter før 1. ordens hovedmaksimum: $N\phi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$. Deretter følger altså 1. ordens hovedmaksimum, som da må tilsvare $N\phi = 6\pi$, dvs $N = 6$. En alternativ og mye enklere måte er å huske at antall bimaksima er $N - 2 = 4$, dvs $N = 6$ spalter.
Som nevnt over har vi 1. ordens hovedmaksimum når $\phi = 0$, og fra figuren ser vi at dette tilsvarer $\theta = 0.006$. Dermed:

$$\pi = \phi = \pi d \sin 0.006/(600 \cdot 10^{-9}) \simeq \pi d \cdot 0.006/(600 \cdot 10^{-9}),$$

dvs

$$d = 0.0001 \text{ m},$$

eventuelt 100 μm.
Spaltebredden a kan vi bestemme med utgangspunkt i ”omhylningskurven”, som passerer gjennom topp–punktene til de ulike hovedmaksimaene, der ”interferensfaktoren” $\sin^2 N\phi/\sin^2\phi = 1$, slik at ”diffraksjonsfaktoren” $\sin^2\beta/\beta^2$ blir lik verdien i hovedmaksimaene. For meg ser det da mest naturlig ut å velge 2. ordens hovedmaksimum, der intensiteten er 0.9. Dermed er, med en β som tilsvarer $\theta = 0.012$

$$\sin\beta = \sqrt{0.9}\beta.$$

Siden $\sqrt{0.9} = \sqrt{1 - 0.1} \simeq 1 - 0.1/2 = 0.95$, er det klart at $\beta \ll 1$, siden $\sin\beta \simeq \beta$ for små verdier av β. Her holder det åpenbart ikke å erstatte $\sin\beta$ med β (da det gir $\beta = 0.9\beta$). Vi benytter derfor den oppgitte tilnærmelsen $\sin\beta \simeq \beta - \beta^3/6$ og finner

$$\beta - \beta^3/6 \simeq 0.95\beta,$$

dvs

$$\beta^2 = (1 - 0.95) \cdot 6 = 0.3,$$

og

$$\beta = \sqrt{0.3} \simeq 0.55.$$

Spaltebredden er derfor

$$a = \frac{\beta\lambda}{\pi\theta} = \frac{0.55 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot 0.012} \simeq 9\ \mu\text{m}.$$

Her kan man selvsagt lure på om den utregnede verdien $\beta \simeq 0.55$ er liten nok til å rettferdiggjøre tilnærmelsen $\sin\beta \simeq \beta - \beta^3/6$. Det er den: Neste ledd i rekkeutviklingen er $\beta^5/5! = \beta^5/120 \simeq 0.0004$ hvis $\beta = 0.55$. Til slutt kan det jo bemerkes at avlesing av intensitetsverdien i 1. ordens hovedmaksimum, i overkant av 0.97, selvsagt også er helt i orden.

b) Første nullpunkt på hver side av $\theta = 0$:

$$N\phi_\pm = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \phi_\pm = \pm\pi/N,$$

som gir

$$\theta_\pm = \pm \arcsin(\lambda/Nd) \simeq \pm\frac{\lambda}{Nd}.$$

Halvverdibredden er da

$$\Delta\theta = (\theta_+ - \theta_-)/2 \simeq \lambda/Nd,$$

dvs

$$\alpha = \lambda/d.$$

Tallverdier:

$$\Delta\theta = \frac{600 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 0.0001} = 0.001.$$

Dette stemmer med figuren, der vi ser at 1. nullpunkt nettopp ligger ved ± 0.001 radianer. Og halvverdibredden er jo (ca) halvparten av det dobbelte av dette!

OPPGAVE 3 [telte 15%]

Med et stort antall meget smale spalter får vi, med koherent lys med en gitt bølgelengde λ, skarpe "linjer" i retninger bestemt av at

$$d \sin\theta_n = n\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

a) Spalteavstand:

$$d = \frac{1\ \text{cm}}{2000} = 5\ \mu\text{m}.$$

b) Alle bølgelengder har sitt 0. ordens maksimum ved $\theta = 0$. Der ser vi følgelig en skarp linje av hvitt lys.

c) Minste synlige bølgelengde er 0.4 μm, den lengste er 0.7 μm. Dermed:

$$\theta_1^{\text{min}} = \arcsin(0.4/5) = 4.6^\circ$$
$$\theta_1^{\text{max}} = \arcsin(0.7/5) = 8.0^\circ$$

Siden ulike bølgelengder for synlig lys vil spres i ulike retninger mellom disse to verdiene, ser vi "alle regnbuens farger", fra blått (fiolett) ved 4.6° til rødt ved 8.0°.

d) Her er det bare å regne ut hvilke retninger θ som 2. ordens maksimum spenner over, og deretter sjekke hvorvidt høyere ordens maksimum spenner over retninger som overlapper med dette:

$$\begin{aligned}
\theta_2^{\min} &= \arcsin(0.8/5) = 9.2^\circ \\
\theta_2^{\max} &= \arcsin(1.4/5) = 16.3^\circ \\
\theta_3^{\min} &= \arcsin(1.2/5) = 13.9^\circ < \theta_2^{\max} \\
\theta_3^{\max} &= \arcsin(2.1/5) = 24.8^\circ \\
\theta_4^{\min} &= \arcsin(1.6/5) = 18.7^\circ > \theta_2^{\max}
\end{aligned}$$

Konklusjon: 2. orden overlapper med 3. orden for retninger θ i området $(13.9^\circ, 16.3^\circ)$ (men ikke med høyere ordner enn dette).

OPPGAVE 4 [telte 15%]

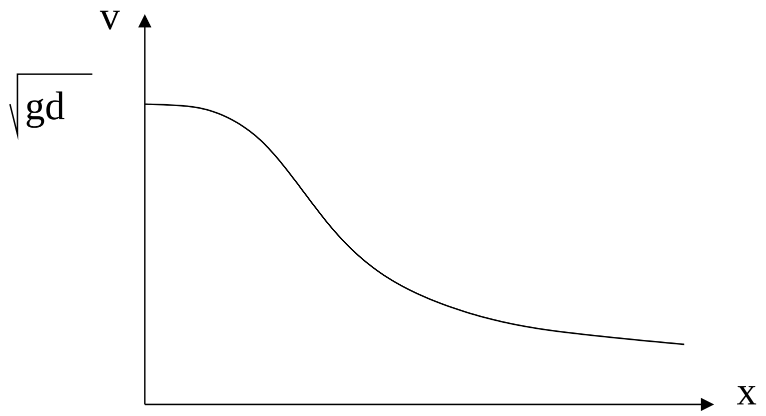
a) Fasehastigheten er

$$v = \omega/k = \sqrt{(g/k)\tanh kd}.$$

Det bes om at v skisseres som funksjon av den dimensjonløse størrelsen $x = kd$.
Med *gitt dybde* d blir x å betrakte som bølgetallet k skalert med en konstant d, slik at

$$v(x) = \sqrt{gd}\sqrt{\frac{\tanh x}{x}}.$$

Vi ser av de gitte opplysningene at $\tanh x \simeq 1$ for store verdier av x og at $\tanh x \simeq x$, evt $\tanh x \simeq x - x^3/3$, for små verdier av x. Da ser vi at $v(x=0) = \sqrt{gd}$, som blir maksimal verdi for fasehastigheten, i og med at funksjonen $(\tanh x)/x \simeq 1 - x^2/3$, og dermed funksjonen $\sqrt{(\tanh x)/x} \simeq 1 - x^2/6$, er monotont avtagende. Liten x betyr liten k for gitt dybde d, dvs stor bølgelengde. Altså beveger langbølgede bølger seg raskest.
Skisse av $v(x)$, med gitt dybde d:

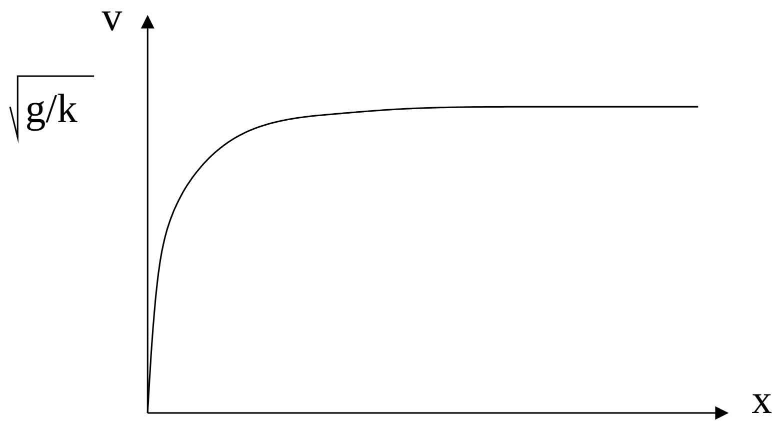


Her har vi brukt det vi vet fra diskusjonen ovenfor: $v(0) = \sqrt{gd}$, $v(x) \sim 1/x$ for store x, samt $dv/dx \sim -x/3 \to 0$ når $x \to 0$ (slik at kurven for $v(x)$ starter ut *flatt* i $x = 0$).

Alternativt, med *gitt bølgetall k* blir x å betrakte som dybden d skalert med en konstant k, slik at

$$v(x) = \sqrt{g/k}\sqrt{\tanh x}.$$

Dette er en monotont voksende funksjon som starter i $v(0) = 0$, har derivert lik uendelig i $x = 0$, og går asymptotisk mot verdien $\sqrt{g/k}$ når x blir stor.
Skisse av $v(x)$, med gitt bølgetall k:



Konklusjonen ovenfor, at bølgehastigheten øker med økende bølgelengde, endrer seg selvsagt ikke.

b) Kvadrering av uttrykket for $v(x)$, for gitt verdi av k, gir

$$v^2 = \frac{g}{k}\tanh x = \frac{g}{k}\cdot\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Løsning mhp x gir

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+kv^2/g}{1-kv^2/g}.$$

[For å komme fram til dette: Multipliser ligningen for v^2 på begge sider med faktoren $1+\exp(-2x)$, samle ledd som inneholder $\exp(-2x)$ på den ene siden av likhetstegnet, løs for $\exp(-2x)$, ta ln på begge sider og divider med faktoren -2.] Vi innfører $x = kd = 2\pi d/\lambda$ og $k = 2\pi/\lambda$ og får til slutt

$$d = \frac{\lambda}{4\pi}\ln\frac{1+2\pi v^2/g\lambda}{1-2\pi v^2/g\lambda}.$$

Med $\lambda = 2$ m, $v = 1.7$ m/s og $g = 9.8$ m/s^2 gir det en dybde $d \simeq 52$ cm. Alternativt uttrykk for d:

$$d = \frac{\lambda}{2\pi}\,\tanh^{-1}\left(\frac{2\pi v^2}{g\lambda}\right).$$

OPPGAVE 5 [telte 10 %]

Her bruker vi $pV = Nk_BT$ (ideell gasslov), $pV^\gamma =$ konstant under adiabatiske forhold, og $\gamma = 7/5$ for toatomige gasser:

$$\begin{aligned}
p_1V_1^\gamma &= p_2V_2^\gamma \\
\Rightarrow V_2 &= V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = V_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5/7} \\
\Rightarrow T_2 &= \frac{p_2V_2}{Nk_B} = \frac{2p_1V_1 \cdot (1/2)^{5/7}}{Nk_B} = T_1 \cdot 2^{2/7} \\
\Rightarrow v_2 &= \sqrt{\gamma k_BT_2/m} = \sqrt{\gamma k_BT_1/m} \cdot \sqrt{2^{2/7}} = v_1 \cdot 2^{1/7} \simeq 1.1\, v_1
\end{aligned}$$

Dvs, lydhastigheten øker med en faktor ca 1.1.

OPPGAVE 6 [telte 20 %]

a) Energibevarelse i kollisjonen gir

$$E_0 + \gamma_0 mc^2 = E_0 + \gamma_1 mc^2,$$

dvs

$$\gamma_0 = \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \pm v_0.$$

Impulsbevarelse i kollisjonen gir

$$\begin{aligned}
E_0/c - \gamma_0 mv_0 &= \gamma_1 mv_1 - E_0/c \\
\Rightarrow 2E_0/c &= \gamma_0 m(v_0 + v_1) \\
\Rightarrow v_1 &= v_0 \quad \text{(ellers blir } E_0 = 0) \\
\Rightarrow E_0/mc &= \gamma_0 v_0 = v_0/\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \\
\Rightarrow (E_0/mc)^2(1 - v_0^2/c^2) &= v_0^2 \\
\Rightarrow (E_0/mc)^2 &= v_0^2(1 + (E_0/mc^2)^2) \\
\Rightarrow v_0^2 &= (E_0/mc)^2/(1 + (E_0/mc^2)^2) = c^2/(1 + (mc^2/E_0)^2) \\
\Rightarrow v_0 &= v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc^2/E_0)^2}}
\end{aligned}$$

b) Dette har vi allerede funnet ovenfor: $v_1 = v_0$, dvs partikkelen "rekylerer" med samme fart i motsatt retning.

c) Systemets totale impuls: $p = 0$. Dette ser vi fra første ligning i forbindelse med impulsbevarelse ovenfor. Her er venstre side lik minus høyre side, følgelig er begge sider lik null.
Systemets totale energi:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + \gamma_0 mc^2 \\
&= E_0 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+(mc^2/E_0)^2}}} \\
&= \ldots\ldots \\
&= E_0 + \sqrt{E_0^2 + (mc^2)^2}
\end{aligned}$$

d) Fotonets hastighet er c, uansett hvilket inertialsystem den måles i.