



Faglig kontakt under eksamen:

Ulf Kristiansen 41 31 11 81 / 73 59 26 34

EKSAMEN I TEKNISK AKUSTIKK (TTT4180)

Tirsdag 5. juni 2007

Tid: 09:00 – 13:00

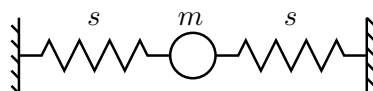
(Sensur: 26. juni 2007)

Hjelpemidler:

B – Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (HP30S).

Oppgave 1

- a) En masse, m , er spent inn mellom to fjærer, hver med fjærkonstant s , som vist i figuren under.

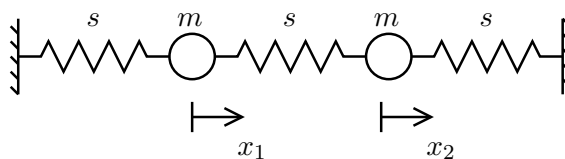


Hva er resonansfrekvensen til systemet?

Svar:

$$\omega = \sqrt{\frac{2s}{m}}.$$

- b) To like store masser er spent inn som vist i figuren under.



Hva er resonansfrekvensene til systemet?

Hint: Symmetribetraktning sier oss at ved resonans vil massene svinge med lik amplitude og enten i, eller 180° ut av fase.

Svar: La posisjonene til massene x_1 og x_2 være definert som i figuren over. Generelt har vi 2 ligninger for systemet gitt ved

$$m \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + s x_1 - s(x_2 - x_1) = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + s x_2 + s(x_2 - x_1) = 0 . \quad (2)$$

I fase så er $x_1 = x_2$ og antagelsen om at $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$ gir da

$$-\omega^2 m X_1 + s X_1 = 0 ,$$

så $\omega = \sqrt{s/m}$.

Når systemet er ut av fase så er $x_1 = -x_2$ og vi får

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + s x_1 - s(x_2 - x_1) &= 0 \\ -\omega^2 m X_1 + 3s X_1 &= 0 , \end{aligned}$$

som gir $\omega = \sqrt{3s/m}$.

Oppgave 2 En 1 m lang streng er hengt opp i taket med et 10 kg tungt lodd i den fri enden. Tettheten av strengen er 0.01 kg/m .

a) Hva blir bølgehastigheten i strengen?

Svar: Bølgehastigheten i strengen er gitt ved

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} .$$

Vi finner $T = 10 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 98.1 \text{ N}$, så $c = 99.05 \text{ m/s}$.

b) Regn begge endene som faste (fixed). Sett opp et generelt uttrykk for utsvinget av strengen dersom den svinger med en av sine resonansfrekvenser.

Forklar hvorfor strengen er et godt utgangspunkt for musikkinstrument.

Svar:

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{j\omega_n t},$$

der

$$\frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2} \frac{c}{L}.$$

- c) Vi slår strengen i et punkt $L/4$ fra en av endene. Sett opp et uttrykk for amplituden til de modene som blir eksitert. Hvilke moder blir ikke eksitert?

Svar: Vi har for en fiksert-fiksert-streng at,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x \\ y(x, 0) &= 0 \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin k_n x \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin k_n x \, dx = 0 \\ B_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L u(x, 0) \sin k_n x \, dx \end{aligned}$$

Vi får $A_n = 0$ for alle n . La $u(x, 0) = U\delta(x - L/4)$, vi får da

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L U\delta(x - L/4) \sin k_n x \, dx \\ &= \frac{2}{\omega_n L} U \sin \frac{k_n L}{4}. \end{aligned}$$

Og siden $\omega_n = n\pi c/L$, blir $k_n = n\pi/L$ og B_n , som er amplituden til de modene som blir eksitert, blir

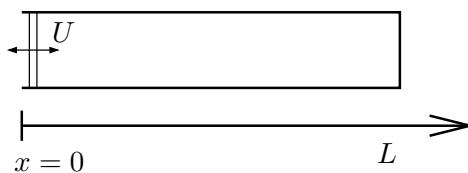
$$B_n = \frac{2}{n\pi c} U \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Modene for $B_n = 0$ blir ikke eksitert, altså modene $n = 4, 8, 12, \dots$.

Oppgave 3 Et rør med lengde L og tverrsnittsareal S drives i den ene enden av et stempel med vinkelfrekvens ω og hastighet U . Røret er fylt med luft. Det er stengt med en hard vegg i den andre enden.

- a) Med antakelse om plane bølger, finn det komplekse lydtrykket og den mekaniske inngangsimpedansen. For et rør med lengde 0.63 m, beregn de tre laveste resonansfrekvensene. Bruk definisjonen der resonansfrekvens er definert som den frekvensen der mekanisk inngangsreaktans er null.

Svar: La x være definert som i figuren under.



Anta at trykket er på formen

$$p(x, t) = \left[A e^{jk(L-x)} + B e^{-jk(L-x)} \right] e^{j\omega t} .$$

Partikkelhastigheten u er da gitt ved

$$u(x, t) = \frac{1}{-j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{A}{\rho c} e^{jk(L-x)} - \frac{B}{\rho c} e^{-jk(L-x)} \right] e^{j\omega t} .$$

Hastighetsamplituden er da

$$U(x) = \frac{A}{\rho c} e^{jk(L-x)} - \frac{B}{\rho c} e^{-jk(L-x)} .$$

Grensebetingelsene er at

$$U(x=0) = U \quad \text{og} \quad U(x=L) = 0 .$$

Den andre grensebetingelsen gir $B = A$, og den første grensebetingelsen gir at

$$\begin{aligned} U &= \frac{A}{\rho c} \left(e^{jkL} - e^{-jkL} \right) \\ U &= \frac{2jA}{\rho c} \sin kL \\ A &= \frac{\rho c U}{2j \sin kL} \end{aligned}$$

slik at

$$p(x, t) = \frac{\rho c U}{2j \sin kL} \cos k(L-x) .$$

Mekanisk inngangsimpedans fås fra ligning 10.2.4 i Kinsler & Frey,

$$\frac{Z_{m0}}{\rho c S} = \frac{Z_{mL}/\rho c S + j \tan kL}{1 + j \tan(kL) Z_{mL}/\rho c S} \quad (3)$$

og med $Z_{mL} = \infty$ (hard vegg) får vi

$$\frac{Z_{m0}}{\rho c S} = -j \cot kL .$$

Vi har resonans for $\text{Im}(Z_{m0}) = 0$ som impliserer $\cot kL = 0$. Vi får

$$k_n L = (2n - 1)\pi/2 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Downarrow$$

$$f_n = \frac{c}{L} \frac{(2n - 1)}{4} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots .$$

De tre laveste egenfrekvensene blir da $f_1 = 134.9$ Hz, $f_2 = 404.8$ Hz og $f_3 = 674.6$ Hz.

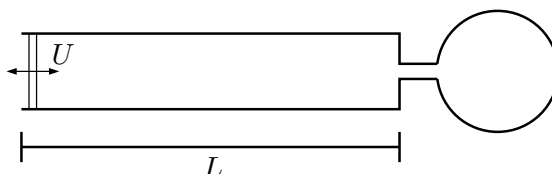
- b) Hva er forskjellen på mekanisk og akustisk impedans, og hvordan forholder de seg til hverandre for plane bølger i rør?

Svar: Mekanisk impedans står for *Kraft/Partikkelhastighet*, og akustisk impedans står for *Trykk/Volumhastighet*.

$$Z_{\text{akustisk}} S^2 = Z_{\text{mekanisk}} , \quad (4)$$

hvor S er tverrsnittsalarealet i røret.

- c) Det blir satt en Helmholtzresonator i enden av røret, som vist i figuren under. Den har resonatorvolum V , halsareal S_H og halslengde L_H .



Hva blir nå den mekaniske inngangsimpedansen til røret?

Om du ser bort fra alle tap i Helmholtzresonatoren, finn en formel du kan beregne resonansfrekvensene med.

Svar: Vi har uttrykket for mekanisk inngangsimpedans (3), men hva er nå Z_{mL} ? Den nederste enden av røret består nå av to deler, en Helmholtzresonator og en hard vegg. Ligning 10.10.3 i Kinsler & Frey gir

$$\frac{1}{Z_L} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} ,$$

hvor Z_1 er impedansen for Helmholtzresonatoren og Z_2 er impedansen for en hard vegg. Altså vi har $Z_L = Z_1$. Vi bruker relasjonen (4) og kan da finne den mekaniske impedansen ved

$$\begin{aligned} \frac{Z_{mL}}{S^2} &= \frac{Z_{m,\text{Helmholtz}}}{S_H^2} \\ Z_{mL} &= \frac{S^2}{S_H^2} Z_{m,\text{Helmholtz}} \end{aligned}$$

Impedansen for en Helmholtzresonator er gitt ved ligning 10.8.7 i Kinsler & Frey

$$Z_{m,\text{Helmholtz}} = (R_r + R_w) + j(\omega m - s/\omega) ,$$

og vi får

$$Z_{mL} = \frac{S^2}{S_H^2} \left((R_r + R_w) + j(\omega m - s/\omega) \right) ,$$

som innsatt i (3) gir

$$\frac{Z_{m0}}{\rho c S} = \frac{\left(\frac{S}{S_H} \right)^2 \left[R_r + R_w + j(\omega m - s/m) \right] / \rho c S + j \tan kL}{1 + j \left(\frac{S}{S_H} \right)^2 \left[R_r + R_w + j(\omega m - s/m) \right] \tan kL / \rho c S}$$

Dersom vi ikke har tap i resonatoren, så har vi $R_r = R_w = 0$, og resonansfrekvensen fås fra

$$\left(\frac{S}{S_H} \right)^2 (\omega m - s/\omega) + \rho c S \tan kL = 0 .$$

Oppgave 4 Et lite klangrom er konstruert med betongvegger. Dimensjonene er $2 \text{ m} \times 2.5 \text{ m} \times 3.5 \text{ m}$.

- a) Beregn det lydtrykksnivået som en 2000 Hz kilde med effekt $7.5 \mu\text{W}$ lager i rommet. Anta at absorpsjonsfaktoren (Sabine absorptivity) er 0.02 ved 2000 Hz.

Svar: Arealet på innsiden av rommet er $S = 41.5 \text{ m}^2$, volumet av rommet er $V = 17.5 \text{ m}^3$. Absorpsjonsarealet blir $A = Sa = (41.5 \times 0.02) \text{ m}^2 = 0.83 \text{ m}^2$. Ligning 12.2.7 i Kinsler & Frey gir det akustiske trykket

$$P_r = \sqrt{\rho c 4 \Pi / A} = 0.1219 \text{ Pa} ,$$

som tilsvarer et lydtrykksnivå på

$$L_p = 20 \log \left(\frac{0.1219}{2 \times 10^{-5}} \right) = 75.7 \text{ dB re } 20 \mu\text{Pa} .$$

- b) Hvor mange sekunder tar det fra lyden skrus på til nivået når en verdi 3 dB lavere enn nivået du regnet ut i a)?

Svar: Bruker energitetthetsformelen

$$\varepsilon = P_r^2 / \rho c^2 .$$

Lydtrykket som tilsvarer 72.7 dB (−3 dB) er da $P_r = 0.0863 \text{ Pa}$ og energitettheten for dette lydtrykket blir da

$$\varepsilon_{-3\text{dB}} = 5.33 \times 10^{-8} \text{ W/m}^3 .$$

Energitettheten i rommet som funksjon av tiden er uttrykt ved

$$\varepsilon = \frac{4\Pi}{Ac} \left(1 - e^{-t/\tau_E} \right) ,$$

hvor Π er kildeeffekten, A er absorpsjonsarealet, c er lydhastigheten og $\tau_E = 4V/Ac$. Vi finner da $t = 0.1724 \text{ s}$.

- c) En person kommer inn i rommet og lydnivået synker med 3 dB. Hvor stort absorpsjonsareal utgjør denne personen?

Svar: Det nye lydtrykket i rommet blir som i b), $P_{\text{ny}} = 0.0863 \text{ Pa}$. Vi finner det nye absorpsjonsarealet ved ligning 12.2.7 i Kinsler & Frey,

$$A_{\text{ny}} = \frac{4\Pi\rho c^2}{AcP_{\text{ny}}^2} = 1.657 \text{ m}^2 .$$

Absorpsjonsarealet som personen utgjør blir da $1.657 - 0.83 = 0.794 \text{ m}^2$.