NOREGS TEKNISK-
NATURVITSKAPLEGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGJEFYSIKK
Fredag 3. desember 2010 kl. 0900 - 1300
Nynorsk

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

Side 2 – 6: Oppgåver
Side 7 – 15: Formelsamling
Side 16: God jul!

Prøva består av 6 oppgåver, i alt 10 deloppgåver. Kvar deloppgåve vil i utgangspunktet telje like mykje (8 %) på sluttkarakteren. Heile denne prøva tel 80 % på sluttkarakteren. Dei resterande 20 % vert baserte på midtsemesterprøva som vart avvikla tidlegere i haust.

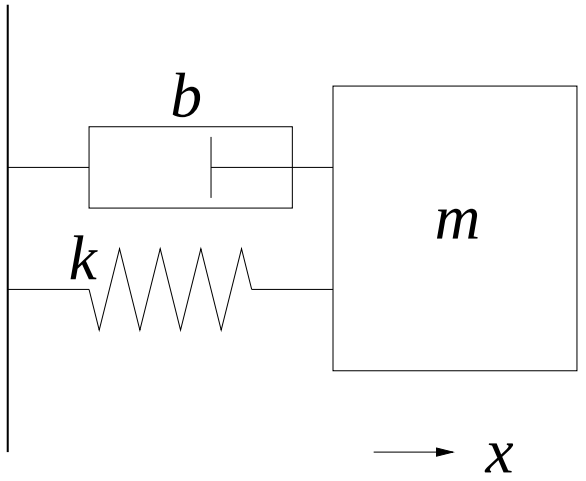
Sensuren kjem seinast 3. januar 2011.

Nokre Taylorutviklingar (for $x \ll 1$, til orden $x^3$):

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \ldots \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 \ldots \\ (1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \ldots \end{aligned}$$

**OPPGÅVE 1** [tel 16 %]

Figuren viser eit dempa svingesystem. Ein masse $m$ er festa til ei ideell fjær med fjærkonstant $k$. Svingningene vert dempa av ei kraft $-b\dot{x}$, dvs proporsjonal med massen sin hastigheit. ($b$ er ein dempingskonstant.)




**a**

• Skriv ned rørslelikninga for dette svingesystemet. (Dvs: Differensiallikninga for massen sitt utsving $x$ frå jamvektsposisjonen $x = 0$.)

Massen sitt utsving er gjeve ved

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

der vi reknar med *svak* demping.

• Kva blir den "karakteristiske dempingstida" $\tau$?

• Kva blir vinkelfrekvensen $\omega$?

Tips: Vel sjølv om du vil skrive ned $\tau$ og $\omega$, eller rekne ut disse storleikane med utgangspunkt i rørslelikninga.

**b**

• Anta at dempinga er særs svak, $\omega\tau \gg 1$. Rekn ut systemet sin $Q$-verdi (evt "godheitsfaktor"), definert ved

$$Q \equiv 2\pi \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^{-1},$$

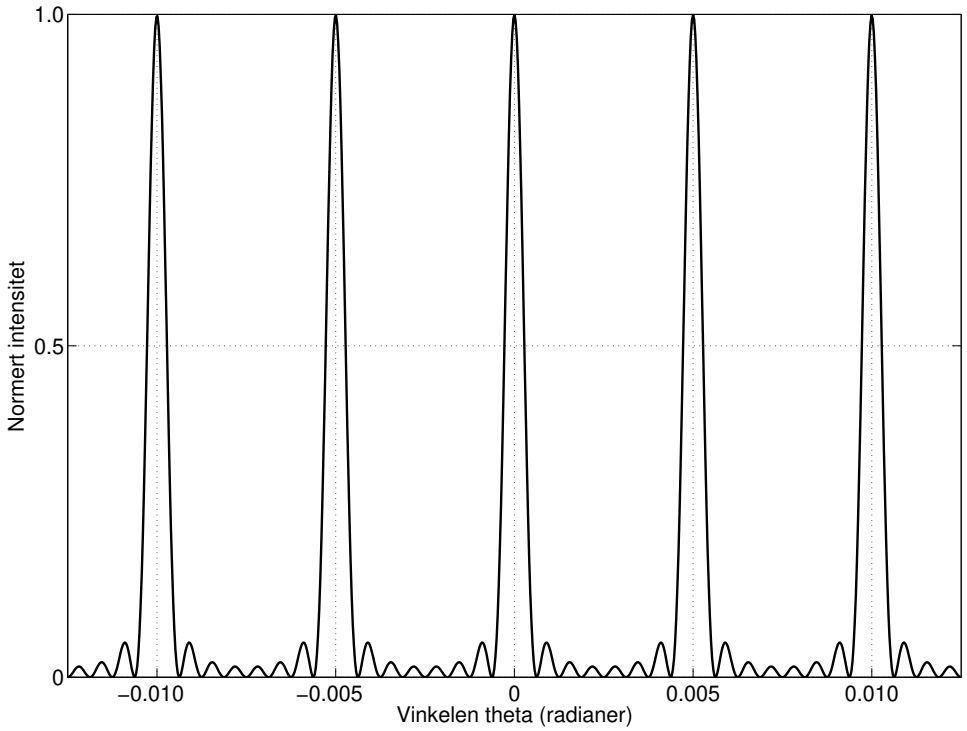
der $\Delta E/E = [E(t) - E(t+T)]/E(t)$ er relativt energitap pr periode $T$.

**OPPGÅVE 2** [tel 8 %]

I ein ideell gass bestående av enkeltatom ("ein-atomige molekyl") er lydhastigheiten ved ein viss temperatur $v_0$. Gassen utvider seg under adiabatiske høve (dvs utan varmeutveksling med omgjevnadane) slik at trykket vert halvert.

• Kva blir no lydhastigheita i gassen?

**OPPGÅVE 3** [tel 8 %]




Figuren over viser (normert) intensitetsfordeling $I(\theta)$ for laserlys som har passert gjennom $N$ særs smale parallelle spalter med spalteavstand $d$. Laseren si bølgjelengd er $\lambda = 500$ nm.

• Bruk figuren til å bestemme $N$ og $d$.

I figuren over er spaltebreidda $a = d/100$.

• Vis, ved å skissere $I(\theta)$ i området $-0.05 < \theta < 0.05$ (radianer), korleis intensitetsfordelinga blir dersom spaltebreidda vert auka til $a = d/5$. (Bruk og her ein normert intensitet, med $I(0) = 1$.)

**OPPGÅVE 4** [tel 16%]

I denne oppgåva ser vi på overflatebølgjer på djupt vatn. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}.$$

Her er $k$ bølgjetalet, $g = 9.8$ m/s$^2$ tyngden sin akselerasjon, $\rho = 10^3$ kg/m$^3$ vatnet sin massetettleik og $\gamma = 0.073$ N/m vatnet si overflatespenning.

**a**

• Bestem den "karakteristiske bølgjelengda" $\lambda_0$ når tyngdeleddet og overflatespenningsleddet bidreg i like stor grad i dispersjonsrelasjonen.

Ei kort bølgjepakke, med essensielt berre ein bølgjetopp, vert danna i det ein båt køyrer forbi ca 50 m frå land. Vatnet er ellers blekkstilt slik at du tydeleg kan følgje bølgjene på veg inn mot land. Anta at bølgjepakka er ein superposisjon av harmoniske bølgjer, med bølgjelengder i området 0.2 til 2.0 m.

• Kor lang tid bruker dei raskaste harmoniske bølgjene (evt "fourierkomponentane") frå dei vert genererte ved båten til dei slår mot land?

• Enn dei langsamste?
(Sjøen er brådjup, så dispersjonsrelasjonen gjeve ovanfor gjeld overalt. Og vi reknar med at bølgjene beveger seg rakt inn mot land.)

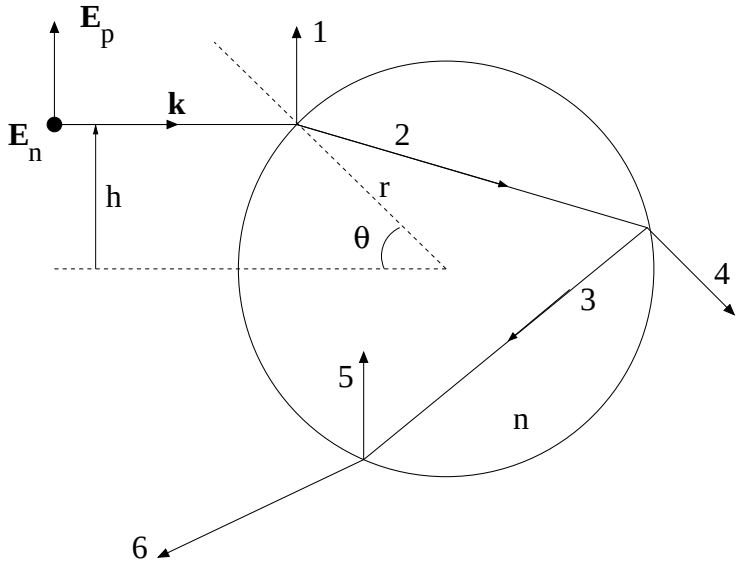
**b**

Bølgjepakker med gruppehastigheit $v_g = 1.0$ m/s har anten ei særs kort bølgjelengd $\lambda_1$ eller ei etter måten lang bølgjelengd $\lambda_2$.

• Rekn ut $\lambda_1$ og $\lambda_2$.

**OPPGÅVE 5** [tel 16 %]

Figuren nedanfor viser moglege "baner" (1 - 6) for ein lysstråle som treff ei dielektrisk skive (eventuelt ekvatorialplanet til ei dielektrisk kule) med radius $r$ og brytningsindeks $n$ i høgd $h$ over senterlinja. Det innkommande lyset kan ein sjå på som ein superposisjon av bølgjer med elektriske feltvektorar $\mathbf{E}_p$ og $\mathbf{E}_n$ høvesvis parallelt med og normalt på innfallsplanet. Det omgjevande mediet er luft, med brytningsindeks lik 1.




Anta heretter at lysstrålen treff skiva i ei bestemt høgd $h_B$ frå senterlinja, slik at samanhengen $\alpha = \beta$ er oppfyld i uttrykka for refleksjonskoeffisientane $R_p$ og $R_n$ gjeve nedanfor. Anta at $\alpha\beta \neq 1$.

**a** • Finn $h_B$ uttrykt ved skiva sin radius $r$ og dens brytningsindeks $n$.

**b** • Angje for kvar av dei seks "banene" 1 - 6 i figuren om strålen er polarisert parallelt med ($p$) eller normalt på ($n$) innfallsplanet, eller om strålen er ein superposisjon av disse to ($p + n$). [Merk at denne deloppgåva i stor grad kan besvarast sjølv om du ikkje har fått til oppgåve **a**.]

Oppgjeve:
Refleksjonskoeffisientar for skrått innfall mot grenseflate mellom to medier ($R_p$ for polarisasjon parallelt med innfallsplanet, $R_n$ for polarisasjon normalt på innfallsplanet):

$$R_p = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad , \quad R_n = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)^2$$

med

$$\alpha \equiv \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \quad , \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}.$$

Her er $\theta_1$ og $\theta_2$ høvesvis innfalls- og brytningsvinkel (evt omvendt), $v_1$ og $v_2$ er lyshastigheiter i medium 1 og 2, og $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ (= vakuumpermeabiliteten) for umagnetiske medier, noko som ein kan rekna med her.

**OPPGÅVE 6** [tel 16 %]

**a**

• Skriv ned uttrykka for kinetisk energi $T$ for ein partikkel med masse $m$ og hastigheit $v$, både ifølgje Newton ($T_{\text{Newton}}$) og Einstein ($T_{\text{Einstein}}$) (dvs ifølgje høvesvis ikkje-relativistisk og relativistisk mekanikk).

• Vis at Einstein er enig med Newton, dvs $T_{\text{Einstein}} \simeq T_{\text{Newton}}$, dersom partikkelen sin hastigheit $v$ er mykje mindre enn lyshastigheita $c$.

• Bestem korreksjonen til det ikkje-relativistiske uttrykket i form av ei polynomutvikling (Taylorutvikling) i hastigheitsforholdet $\beta \equiv v/c$, dvs bestem $a_1$ og $a_2$ i

$$T_{\text{Einstein}} = T_{\text{Newton}} \left(1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots\right).$$

**b**

To elektroner, kvar med masse $m$, beveger seg rett mot kvarandre og kolliderer. Målt i lab-systemet har dei to elektrona like stor kinetisk energi $T$.

• Kor stor er *relativ* kinetisk energi $\tilde{T}$? (Dvs: Kinetisk energi målt i eit inertialsystem der eit av elektrona er i ro.)

• Vurder om resultatet er som forventa i den ikkje-relativistiske grensa $T \ll mc^2$.

Anta at du skal gjennomføre eit eksperiment som krev at dei kolliderande elektrona har relativ kinetisk energi $\tilde{T} = 1000$ GeV ($= 10^{12}$ eV).

• Kor mykje er det da å spare på å akselerere begge elektrona (i motsatt retning!) framfor å akselerere berre det eine elektronet?

Oppgjeve: Elektronet sin masse er $m \simeq 0.5$ MeV$/c^2$.

# Formelsamling

**Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\xi(\boldsymbol{r},t)\left(\equiv \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde $\lambda$:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode $T$:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ($Q$ = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ($Q$ = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

  Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass ($m$ = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  med $I_0 = 10^{-12}$ W/m$^2$

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\,\nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet $\mu_1$ for $x < 0$ og $\mu_2$ for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv $x$-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis $E_1$, $\rho_1$ (for $x < 0$) og $E_2$, $\rho_2$ (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv $x$-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned} \Delta D_\perp &= 0 \\ \Delta E_\parallel &= 0 \\ \Delta B_\perp &= 0 \\ \Delta H_\parallel &= 0 \end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med $N$ smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra $N$ spalter, spaltebredde $a$, spalteavstand $d$:

$$I(\theta) = \hat{I} \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til $S$):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\left(x - vt\right) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left(\overline{x} + v\overline{t}\right) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i $S$ ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi (partikkel med masse $m$):

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: $E$, $\boldsymbol{p}$, $E_k$ og $m$ bevart.
- Uelastisk prosess: $E$ og $\boldsymbol{p}$ bevart.
- Lorentz invariant for system med flere partikler:

$$E^2 - p^2c^2 = \overline{E}^2 - \overline{p}^2c^2 = E_0^2$$

Her er $E$ og $\boldsymbol{p}$ ($\overline{E}$ og $\overline{\boldsymbol{p}}$) hhv total energi og total impuls i $S$ ($\overline{S}$), mens $E_0$ er total energi i $S_0$, inertialsystemet der total impuls er null.

Alternativt kan dette formuleres som invarians av skalarproduktet av firer-impulsen med seg selv:

$$p_\mu p^\mu = \overline{p}_\mu \overline{p}^\mu$$

der

$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z) \quad , \quad p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$$

# GOD JUL!