

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 BØLGEFYSIKK

Mandag 7. juni 2010 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.

Side 2 - 6: Oppgavene

Side 7 - 15: Formelsamling

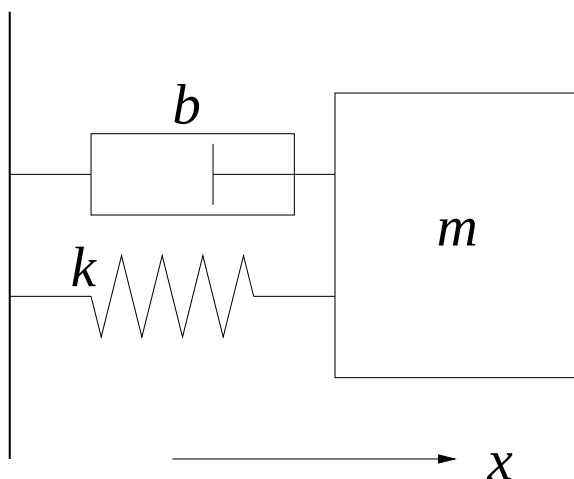
Prøven består av 5 oppgaver som vil telle like mye under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer senest 27. juni.

Oppgavene

OPPGAVE 1 [Teller 20%]

En masse m er festet til en fjær med fjærkonstant k . Dempingskraften er proporsjonal med hastigheten, $-b\dot{x}$.



Vis at massens bevegelse er bestemt av ligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

der x representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.

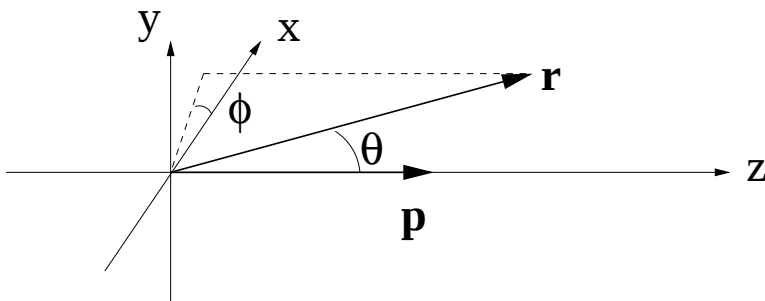
Vi betrakter svakt dempede svingninger, dvs $b \ll 2m\omega_0$, der $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$. Vis (ved innsetting) at et utsving med tidsavhengighet

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi)$$

er løsning av bevegelsesligningen, og fastlegg således ”dampingstiden” τ og vinkelfrekvensen ω .

Du vil gjerne at dempingen skal være så liten at systemets (mekaniske) energi ikke reduseres med mer enn 1% i løpet av 50 perioder av svingningen. Hva blir da øvre grense $b_{\max}$ for dempingskoeffisienten dersom $m = 0.25$ kg og $k = 400$ N/m.

OPPGAVE 2 [Teller 20%]



En oscillerende elektrisk dipol,

$$\mathbf{p}(t) = \hat{z} p_0 \cos \omega t,$$

resulterer i et elektrisk felt,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta},$$

og et magnetfelt,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi cr} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}.$$

Begge disse er tilnærmede uttrykk som gjelder så lenge vi er langt unna dipolen, samt at bølgelengden er stor i forhold til dipolens utstrekning. Videre er θ vinkelen mellom z -aksen og $\mathbf{r}$, mens $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ er enhetsvektorer som peker i retning av økende verdi av henholdsvis θ og ϕ . (Med andre ord, r , θ og ϕ er standard kulekoordinater, se figuren ovenfor.)

Bestem Poyntings vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$, og deretter strålingsintensiteten

$$I(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Skisser $I(\theta)$ (for gitt r og ϕ) mellom $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Skisser også $I(\phi)$ (for gitt r og θ) mellom $\phi = 0$ og $\phi = 2\pi$.

Vis at total (midlere) utstrålt energi pr tidsenhet (dvs effekt) blir

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

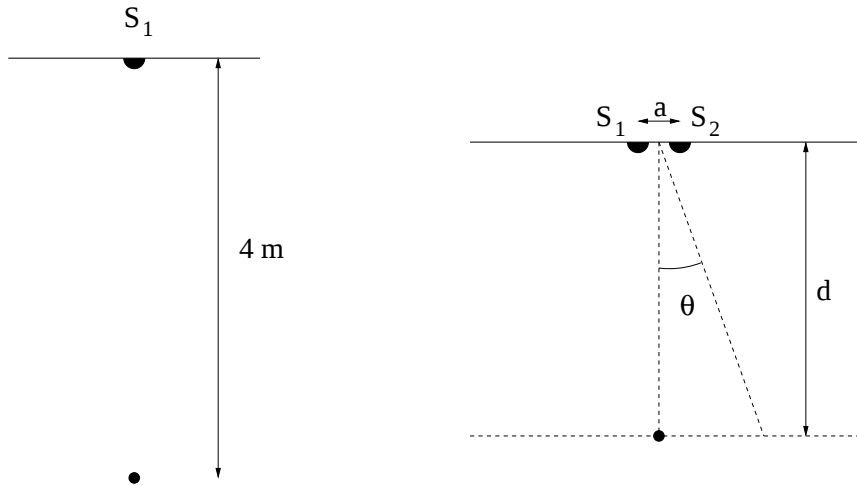
(Tips: Integrer $\langle \mathbf{S} \rangle$ over en kuleflate med radius r .)

Diskuter kort fenomenene blå himmel og rød solnedgang i lys av dette resultatet.

Opgitt:

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta)$$

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

OPPGAVE 3 [Teller 20%]

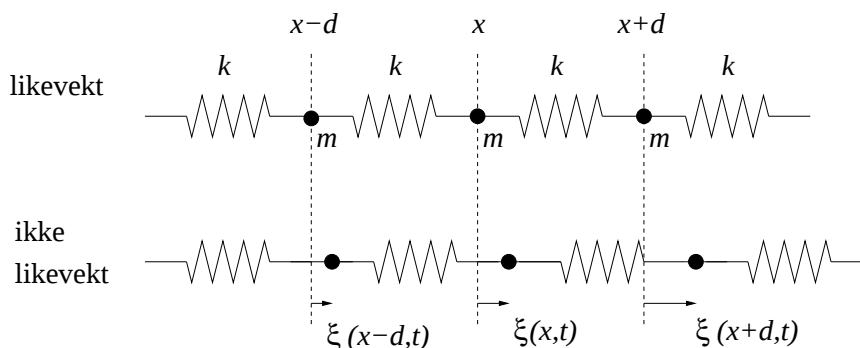
En høyttaler S_1 genererer en halvkuleformet lydbølge med frekvens $\nu_1 = 440$ Hz. Midlere utstrålt effekt er $P_1 = 1.0$ W, og intensiteten er uniform over halvkulen. (Se figur over, til venstre.) Du befinner deg i avstand 4 m fra høyttaleren. Hvor stor er lydintensiteten I_1 der? Hvor mange dB (desibel) tilsvarer dette?

To slike høyttalere, S_1 og S_2 , genererer halvkuleformede lydbølger med frekvens henholdsvis $\nu_1 = 440$ Hz og $\nu_2 = 441$ Hz. (Se figur over, til høyre.) Utstrålt effekt er den samme for de to høyttalerne. Du befinner deg rett foran høyttalerne, i avstand d . Anta at d er stor i forhold til avstanden a mellom de to høyttalerne. Lydbølgene er da tilnærmet plane bølger der du står (i $x = d$), slik at de tilhørende (longitudinale) partikkelutsvingene kan skrives på formen $\xi_j(x, t) = \xi_0 \sin(k_j x - \omega_j t)$ ($j = 1, 2$). Finn et uttrykk for intensiteten $I(d, t)$. Skisser noen sekunders forløp av $I(d, t)$. Forklar hva du hører.

Anta nå at de to høyttalerne genererer identiske lydbølger (samme intensitet og fase) med frekvens $\nu = 3400$ Hz. Avstanden mellom høyttalerne er $a = 30$ cm, og du kan bevege deg langs en linje i avstand $d = 10$ m fra høyttalerne. Hva er lydbølgens bølgelengde λ ? Hvor langt må du flytte deg (mot høyre, evt venstre, i figuren) for at lyden skal forsvinne?

Oppgitt: $I(x, t) \sim |\xi(x, t)|^2$. Lydhastigheten i luft: 340 m/s.
 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2]$

OPPGAVE 4 [Teller 20%]



Figuren over viser en del av en uendelig lang masse-fjær-transmisjonslinje, bestående av identiske masser m forbundet med identiske masseløse fjærer med fjærkonstant k . Øverst i figuren er systemet i likevekt, med massene lokalisert i posisjoner $x + nd$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Nederst i figuren er systemet ikke i likevekt, eksempelvis kan det være en (longitudinal) harmonisk bølge som forplanter seg langs transmisjonslinjen. En masses utsving i forhold til likevektsposisjonen angis med ξ , som dermed avhenger både av x og t .

Anvend Newtons 2. lov på massen med likevektsposisjon x og utsving $\xi(x, t)$ og vis at utsvinget ξ oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dersom vi antar at funksjonen $\xi(x, t)$ varierer langsomt (som funksjon av x) mellom to nabomasser (dvs $d \ll \lambda$, der λ er bølgelengden). Hva blir bølgehastigheten v ?

Anta nå at en harmonisk bølge

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

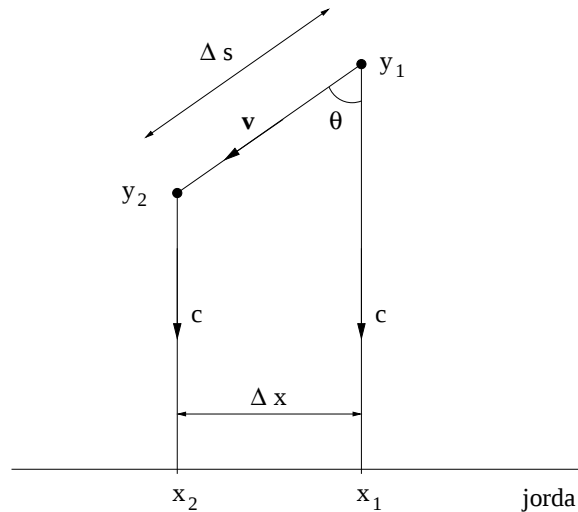
forplanter seg langs transmisjonslinjen. Vi skal se nærmere på energien som transporteres med en slik bølge. Bestem kinetisk energi E_k pr masse og potensiell energi E_p pr fjær. Vis at disse er like store, $E_k = E_p$, og at den totale energien pr lengdeenhet blir

$$\varepsilon = \frac{E}{d} = \mu \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

der $\mu = m/d$ er transmisjonslinjens masse pr lengdeenhet. (Tips: Regn ut E_p til ledende orden i (den lille) størrelsen kd .) Hvor mye energi passerer i middel (dvs midlet over en periode) et gitt sted på transmisjonslinjen pr tidsenhet?

Oppgitt:

$$\xi(x \pm d, t) = \xi(x, t) \pm d \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} d^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

OPPGAVE 5 [Teller 20%]

En stjerne beveger seg med hastighet v over himmelen, med en retning slik at vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og synslinjen (fra stjernen ned til jorda) er θ (se figuren ovenfor). Når stjernen befinner seg i posisjon (x_1, y_1) , sender den ut lys som detekteres på jorda, i posisjon $(x_1, 0)$, ved tidspunktet t_1 . Tilsvarende, når stjernen befinner seg i posisjon (x_2, y_2) , sender den ut lys som detekteres på jorda, i posisjon $(x_2, 0)$, ved tidspunktet t_2 . Den skjødesløse *observatør* kunne nå komme i skade for å hevde at stjernen beveger seg med hastighet

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

men som fysiker innser du raskt at dette bare ville være en *tilsynelatende* hastighet, ettersom Δx ikke nødvendigvis tilsvarer avstanden som stjernen har beveget seg i løpet av tiden Δt .

Den skjødesløse *fysiker* kunne videre komme i skade for å hevde at stjernes hastighet v alltid må være større enn u , ettersom tilbakelagt reise Δs alltid vil være større enn Δx (med mindre $\theta = \pi/2$, da er selvsagt $\Delta s = \Delta x$).

Som den *påpasselige* fysiker *du* er, innser du imidlertid at stjernen befant seg i posisjonene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) henholdsvis ved tidspunktene t'_1 og t'_2 , og at tidsforbruket $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ ikke nødvendigvis er det samme som Δt . Du bestemmer deg derfor for å tenke saken nøyere gjennom før du uttaler deg om sammenhengen mellom stjernes hastighet $v = \Delta s / \Delta t'$ og dens *tilsynelatende* hastighet u . Etter en grundig analyse har du kommet fram til sammenhengen

$$u = \frac{v \sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

Vis hvordan du kom fram til dette resultatet!

For en gitt hastighet v vil det være en bestemt vinkel $\theta_{\max}$ som gir maksimal *tilsynelatende* hastighet u . Bestem denne vinkelen $\theta_{\max}$. Finn et uttrykk for u når vinkelen er $\theta_{\max}$ og vis at u da alltid vil overstige v . For hvilke verdier av v vil nå u også overstige lyshastigheten c ?

Tips: Alle tidspunkter og posisjoner ("hendelser") i denne oppgaven måles i jordas referansesystem (som her betraktes som et inertialsystem).

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x, t)$, midlet over bølgelengde λ :

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda A(x, t) dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x, t)$, midlet over periode T :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, t) dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_B T$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ($Q = \text{varme}$):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ($Q = \text{varme}$):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmetveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

- Dopplereffekt:

$$\nu_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_S}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1 , ρ_1 (for $x < 0$) og E_2 , ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Bølgeligning for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t\end{aligned}$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\bar{S}$ har hastighet $\mathbf{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

$$y = \bar{y}$$

$$z = \bar{z}$$

$$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i S ($\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i $\bar{S}$ ($\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x\hat{x} + \bar{u}_y\hat{y} + \bar{u}_z\hat{z}$):

$$\bar{u}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_y = d\bar{y}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_z = d\bar{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\bar{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Energi:

$$E = \gamma mc^2$$

$$E_0 = mc^2$$

$$E_k = E - E_0$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

- Elastisk prosess: E , $\mathbf{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\mathbf{p}$ bevart.