

Harald E. Krogstad

FOURIERTRANSFORMEN - en innføring



Institutt for matematiske fag

.... "blekka er meningsløs"
(frustrert 2. klassing etter
gjennomlesning av førsteutgaven)

Dette notatet oppsummerer det som forfatteren mener er nyttig kunnskap om fouriertransformen.

Alle oppfordres til å kommentere feil og uklarheter i teksten.

IMF høsten 2001
Harald E. Krogstad

1 INNLEDNING

Fourierrekker og *fouriertransformasjon* har navn etter Jean-Baptiste-Joseph Fourier som oppdaget at han kunne løse varmeledningsproblemer ved å skrive funksjoner som fourierrekker for nesten 200 år siden. Den korrekte norske betegnelsen er *fouriertransformasjon*, men den engelsk/USA-inspirerte formen *fouriertransform* har blitt vel så vanlig, og er den vi benytter nedenfor.

Mens en tradisjonelt brukte fouriertransformen til å løse partielle differensialligninger, er det i dag bruken av fourierteknikker innenfor det som med en fellesbetegnelse kan kalles *systemteori* og *signalbehandling* som har størst praktisk nytte. Dette gjelder blant annet digital lyd-, bilde- og videobehandling, seismikk, radar, medisin og telekommunikasjon. I humoristiske ordelag er det sagt om Norbert Wiener, som var en av det 20. århundrets største matematikere, at det eneste han kunne var fourierteori. På den annen side kunne han løse alle problemer med den!

For datamaskiner er det utviklet en numerisk fouriertransform, som vanligvis kalles *diskret fouriertransform*. Det er imidlertid umulig å forstå de numeriske fouriermetodene uten å kjenne til hovedtrekkene i den analytiske teorien. Diskret fouriertransform er et matrise-vektorprodukt som er relativt regnekrevende hvis det skal utføres mange ganger for store signaler, men heldigvis er det oppdaget en numerisk algoritme for å beregne fouriertransformen som er mye raskere enn en skulle tro var mulig. Algoritmen, som kalles *Fast Fourier Transform (FFT)*, var allerede kjent for Gauss, men potensialet i den ble ikke klart før en begynte å regne for alvor, omkring 1965. FFT er altså ikke en ny type fouriertransform, men en smart måte å regne på.

Funksjoner av kontinuerlige variable har dominert vitenskap og teknikk i mange hundre år, mens datamaskinene som kjent bare kan lagre og operere med et endelig antall tall. På en datamaskin er derfor *alle* funksjoner definert på en endelig mengde. CD-platen er et nærliggende eksempel. Selv om et musikksignal i utgangspunktet er en kontinuerlig strøm av lyd, vil vi på en CD-plate lagre dette i form av en tallrekke registrert omlag 40 000 ganger i sekundet. I CD-spilleren fins en modul som igjen lager et kontinuerlig lydsignal av tallrekken. Fourierteorien som er knyttet til sammenhengen mellom kontinuerlige og diskrete signaler, kalles *samplingsteori*. Å *sample* betyr ”å registrere i diskrete punkter”, for eksempel 300 ganger pr. tomme på en scanner. I dag er digitalt fotografi i ferd med å overta tradisjonell analog fotografering på samme måte som CD-platen har overtatt for vinylplaten, og alle målinger i forbindelse med industrielle prosesser er digitalt registrerte, det vil si samplede.

Et fellesbegrep for mange anvendelser av fourierteori er begrepet *filter*. Vi har alle møtt filtre gjennom bass- og diskant-filtre på en radio, og ellers for eksempel innenfor bildebehandling der en kan *blurre* bildet, d.v.s. gjøre det uklart, eller en kan gjøre kantene skarpere. I notatet introduserer vi derfor først filtre og begreper som *linearitet*, *konvolusjon*, *impulsfunksjon* og *impulsrespons*. Deretter innfører vi fouriertransformen og viser hvorfor den er et naturlig verktøy når en skal undersøke filtre. Vi gjennomgår de viktigste egenskapene, og viser eksempler på hvordan fouriertransformen brukes. Tilslutt forteller vi hvordan diskret fouriertransform er definert og litt om hva som skjer når en sampler et signal.

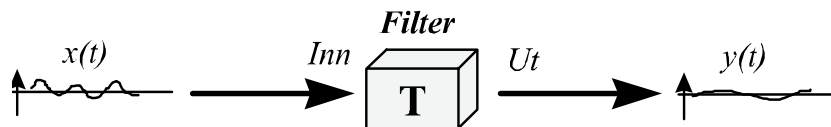


Figure 1: Et filter omformer et inngangssignal til et utgangssignal.

2 FILTRE

Et *filter* omformer et inngangssignal (*input*), f , til et utgangssignal (*output*), g . Dette kan en noe abstrakt skrive $f \longrightarrow g = T(f)$, der T symboliserer filteret. *Transformasjoner* og *systemer* er andre navn på filtre, og teorien om filtre kalles vanligvis *systemteori*.

Signalene kan være endimensjonale (f. eks. et audiosignal) eller flerdimensjonale (f. eks. bilder, video). Signalene som går inn og som kommer ut behøver ikke å være funksjoner av samme variabel. I mange anvendelser er input og output funksjoner av tiden, t , mens for bilder uttrykker variabelen posisjonen på bildet og er derfor todimensjonal.

Vanlig derivasjon av et signal som varierer i tiden, er et filter:

$$f(t) \longrightarrow g(t) = \frac{df}{dt}(t).$$

Følgende filter kalles et *glidende middel* over et tidsintervall med lengde L :

$$f(t) \longrightarrow g(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t-s) ds$$

(Etterhvert som tiden går, erstatter vi $f(t)$ med gjennomsnittet fra $t - L/2$ til $t + L/2$).

Disse filtrene har to interessante egenskaper:

- Hvis inngangssignalet f multipliseres med et tall a , vil også resultatet multipliseres med a , dvs.: $T(af) = aT(f)$.
- Hvis vi sender inn en sum av to signaler, $f + g$, får vi ut summen av resultatene: $T(f + g) = T(f) + T(g)$.

Vi kan slå begge egenskapene sammen ved å si at

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g),$$

for alle tall a og b , og alle signaler f og g .

Det er vanligvis lett å se om et filter har denne egenskapen, og slike filtre kalles for *lineære*. En Hi-Fi forsterker er et filter der det stilles store krav til linearitet.

De to eksemplene ovenfor har enda en nyttig egenskap. Filtrene er *uavhengige* av av den fri variable (hvordan vi deriverer avhenger jo ikke av tiden, og gjennomsnittet ble tatt over et tidsrom L uansett hva t er). Dette kan en uttrykke ved å føre inn *forskyvningen* eller *translasjonen* av en funksjon,

$$f_{t_0}(t) \triangleq f(t - t_0).$$

Symbolet $\triangleq$ betyr ”er definert ved”. Det er viktig å tegne opp en kjent funksjon, velge for eksempel $t_0 = 1$, og se at grafen for f_{t_0} virkelig forskyver seg en lengde 1 mot høyre i forhold til grafen for f ! Filteret T sies å være *translasjonsinvariant* hvis $T(f_{t_0}) = (Tf)_{t_0}$. Hvis T betyr derivasjon, blir jo

$$T(f_{t_0})(t) = \frac{d}{dt}f(t - t_0) = f'(t - t_0) \cdot 1 = (f')_{t_0}(t) = (Tf)_{t_0}(t).$$

Hvis t er tid, sier en også ofte at filteret da er *stasjonært* eller *tidsuavhengig*.

Filtre som for eksempel

$$\begin{aligned} f(t) &\longrightarrow g(t) = f^2(t), \\ f(t) &\longrightarrow g(t) = \max(0, f(t)), \end{aligned}$$

er *ikke-lineære*. Det nederste filteret kalles forøvring et *klippefilter* siden det klipper vekk de delene av f der verdiene er negative. Moderne rockemusikk er et godt eksempel på hvordan lyd forvrenges gjennom ikke-lineære filtre.

Alle filtrene ovenfor er stasjonære. Et filter kan altså godt være stasjonært uten å være lineært. Omvendt vil filteret $T(f)(t) \triangleq tf(t)$ være lineært, men *ikke* tidsuavhengig.

Oppgave 1: Hvilke egenskaper har disse filtrene?

- (a) $f(t) \longrightarrow g(t) = f''(t) - 2f(t)$.
- (b) $f(t) \longrightarrow g(t) = \sin(t)f(t)$.
- (c) $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$.
- (d) $f(t) \longrightarrow g(t) = f(t) + 1$.
- (e) $f(t) \longrightarrow g(t)$, der $g' + g = f$ (og det hele startet i $t = -\infty$).

Oppgave 2: Vis at en *seriekobling* av to lineære filtre,

$$f \longrightarrow g = T(f) \longrightarrow h = S(T(f)),$$

igjen blir et lineært filter.

3 KONVOLUSJON

3.1 Definisjon

Filteret definert ved

$$f(t) \longrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)f(\tau)d\tau,$$

kalles et *konvolusjonsfilter* og integralet en *konvolusjon* (I forbindelse med laplacetransformen betrakter vi signaler for $t \geq 0$, og da er det naturlig å starte integralet i 0 og la $h(t) \equiv 0$ for $t \leq 0$. Dette gir definisjonen for konvolusjon som brukes for laplacetransformen).

Det glidende middel er et eksempel på en konvolusjon der $h(t) = 1/L$, $|t| < L/2$, 0 ellers.

Det er enkelt å se at et konvolusjonsfilter er lineært (integralet selv har jo nettopp denne egenskapen). I tillegg er konvolusjonsfilteret translasjonsinvariant:

$$T(f_{t_0})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)f(\tau - t_0)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t_0 - s)f(s)ds = T(f)(t - t_0) = T(f)_{t_0}(t).$$

($s = \tau - t_0$). Skrivemåten for konvolusjon er rimelig standard, nemlig

$$h * f(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

(Symbolet $*$ er det vanligste. Noen steder ser en også $\otimes$ eller $\star$).

Merk at argumentene er $t - \tau$ og τ , at t har $+$ foran seg, og at integralet tas med hensyn på τ . Det er *ikke* nødvendig å huske hvilken funksjon som har $t - \tau$, og hvilken som har τ , siden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)f(\tau)d\tau \stackrel{\tau=t-s}{=} \int_{\infty}^{-\infty} h(s)f(t - s)d(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)f(t - s)ds.$$

En fin måte å øve seg i å regne med konvolusjon er å vise følgende regneregler:

$$\begin{aligned} h * f &= f * h, \\ f * (ag + bh) &= a(f * g) + b(f * h), \\ f * (g * h) &= (f * g) * h. \end{aligned}$$

Merk at rekkefølgen vi utfører konvolusjonene i er likegyldig (det ligger en forutsetning om eksistens av integralene i dette som vi ikke kommer nærmere inn på).

Konvolusjonens form som et slags glidende middel gjør at den har en "utglattende" virkning. Noe upresist kan vi si at resultatet av en konvolusjon er minst like glatt som den glatteste av funksjonene som inngår i konvolusjonen. Hvis h er n ganger deriverbar, vil for eksempel $(h * f)^{(n)} = h^{(n)} * f$ uansett formen på f .

3.2 Impulsfunksjonen

Det enkleste "filteret" vi kan tenke oss, er *identitetsfilteret*, $T(f) = f$, som gir ut samme signal som vi putter inn. Dessverre finnes det ingen funksjon slik at vi generelt har $h * f = f$. Ikke desto mindre kan en lage seg følger av funksjoner $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ slik at $h_n * f(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$ (se oppg. 6). Grensen for h_n når $n \rightarrow \infty$ kalles en *generalisert funksjon*, og betegnes i dette tilfelle som *impulsfunksjonen*, *enhetspulsen*, *Diracs δ -funksjon*, *Deltafunksjonen*, eller bare *δ -funksjonen*. Det er hensiktsmessig å skrive δ -funksjonen som en vanlig funksjon ved å *definere*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)f(s)ds \triangleq f(0) \text{ (hvis } f \text{ er kontinuerlig)}.$$

Hvis vi tegner opp funksjonene $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ i oppg. 6, ser vi at de blir høyere og smalere etterhvert som n øker, mens $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)dt = 1$. Det er nyttig å forestille seg δ -funksjonen som null utenfor $t = 0$ og med en "impuls" i origo slik at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)ds = 1.$$

Ved å bruke definisjonen på δ -funksjonen, får vi

$$\delta * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)f(t-s)ds = f(t-0) = f(t),$$

som viser at δ -funksjonen nettopp gir oss identitetsfilteret.

Hvis vi nå har et filter $T(f) = h * f$, og vi putter $f = \delta$ inn i filteret, kommer $h * \delta = \delta * h = h$ ut. Selv om filteret for oss er en svart boks, kan vi, hvis vi vet at filteret er et konvolusjonsfilter, finne h ved å putte inn δ -funksjonen og registrere resultatet. Derfor kalles h for filterets *impulsresponsfunksjon*.

Oppgave 1: Vis at $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$ og $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Oppgave 2: Vis at seriekoblinger av konvolusjonsfiltre igjen kan skrives som et konvolusjonsfilter, og at rekkefølgen av filtrene er likegyldig.

Oppgave 3: Vis at en forskyving t_0 av en funksjon kan skrives $\delta_{t_0} * f$.

Oppgave 4: Vis at $\delta_{t_0} * \delta_{t_1} = \delta_{t_0+t_1}$ (Se hva som skjer når vi tar $(\delta_{t_0} * \delta_{t_1}) * f = \delta_{t_0} * (\delta_{t_1} * f)$!)

Oppgave 5: Finn impulsresponsen til filteret

$$f(t) \longrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} f(\tau) d\tau.$$

Oppgave 6: La

$$h_n(t) = \begin{cases} n/2, & |t| < 1/n, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis fra middelverdisetningen for integraler at

$$h_n * f(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$$

hvis f er kontinuerlig (Dette er grunnlaget for å definere δ -funksjonen).

Oppgave 7: Vis at

$$\frac{n}{2} \left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} \right) * f(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{df}{dt}(t),$$

der f er deriverbar.

Oppgave 8: Et konvolusjonsfilter har en ikke-negativ impulsrespons, $h(t) \geq 0$, og $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 1$. Vis at output aldri blir større enn maksimum for input, og aldri mindre enn minimum av input:

$$\begin{aligned} \max_t (h * f(t)) &\leq \max_t f(t), \\ \min_t (h * f(t)) &\geq \min_t f(t). \end{aligned}$$

4 FOURIERTRANSFORMEN

4.1 Definisjon

Før vi definerer fouriertransformen minner vi om *Eulers formel*, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, som leder til

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \\ \sin \alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \end{aligned}$$

Det er også nyttig å huske at $\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$, og at $\int e^{zt}dt = \frac{1}{z}e^{zt} + C$, selv når $z \neq 0$ er et vilkårlig *komplekst* tall.

Vi skal definere fouriertransformen for $\omega \in \mathbf{R}$ ved

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) f(t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t) f(t) dt\end{aligned}$$

Variabelen ω kalles *vinkelfrekvens* eller bare *frekvens*. Det er uheldig bare å si frekvens, siden det er vanlig å skille mellom vinkelfrekvens ω og frekvens $\nu = \omega/2\pi$. Som vi ser, vil fouriertransformen generelt være en funksjon med *komplekse* verdier, men den kan jo regnes ut som to vanlige integraler ved å finne realdel og imaginærdel hver for seg (Det er ikke uvanlig at også f har komplekse verdier, og da må vi splitte opp ytterligere).

Det virker muligens merkelig at en kan ha virkelige signaler med imaginære (komplekse) verdier, men i praksis vil dette være et *par av signaler* som består av real- og imaginærdelene til det komplekse signalet, med andre ord, *to reelle signaler*, $f(t) = \{\text{Re } f(t), \text{Im } f(t)\}$. Komplekse signaler er for eksempel vanlig innen radar, seismikk og i medisin (røntgentomografi, ultralyd og NMR).

Hvis en begrenser seg til funksjoner med reelle verdier, kan en definere en *reell* utgave av fouriertransformen på samme måte som vi skriver fourierrekker med sinus og cosinus. De fleste anvendte framstillinger foretrekker imidlertid den mer kompakte, komplekse formen.

Hatten ” $\hat{}$ ” over funksjonen symboliserer fouriertransformen. Noen ganger er det greiere å skrive $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ for det samme.

Vi skal ikke diskutere forutsetningene for at fouriertransformen eksisterer, og heller ikke skal vi utlede den omvendte formelen som tar oss fra en fouriertransform tilbake til funksjonen selv, *den inverse fouriertransformen*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Det finnes dessverre ikke noe enkelt ordentlig bevis for denne formelen. Merk at det er ” $-$ ” i eksponenten i definisjonen og ” $+$ ” i den inverse fouriertransformen. Noen ganger gjør vi bruk av notasjonen $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ for den inverse fouriertransformen.

Advarsel: Dere vil sikkert møte andre måter å definere fouriertransformen på. Så lenge en er konsekvent når en regner, er alle definisjoner like gode.

Det er for eksempel vanlig å ha faktoren $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ både foran definisjonen og den inverse, fortegnene i eksponensialfunksjonene kan være byttet, og endelig kan en benytte frekvens i stedet for vinkelfrekvens, slik at $\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i t \nu} f(t) dt$.

Som en kanskje aner, finnes det sammenhenger mellom fouriertransform og fourierrekker, og mellom fourier- og laplacetransform. Dette er blant annet omtalt i boka til Bracewell.

4.2 Enkle egenskaper

I dette avsnittet skal vi finne enkle egenskaper til fouriertransformen. Formlene vil endre seg hvis en bruker andre definisjoner på fouriertransformen, mens utledningene essensielt er de samme. Framstillingen har et visst preg av oppramsing, men lesere med bakgrunn i laplacetransformen vil kunne se en god del likhetspunkter.

Den aller enkleste egenskapen til fouriertransformen er *linearitet*, dvs. at

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g),$$

for alle funksjoner f og g , og tall a og b . Det er opplagt fra definisjonen.

Andre nyttige observasjoner som også følger rett fra definisjonen:

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt, \\ f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)d\omega.\end{aligned}$$

Vi husker at den *translaterte* funksjonen f_{t_0} er definert ved $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$. For fouriertransformen får vi da

$$\begin{aligned}\widehat{f_{t_0}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t - t_0)dt \stackrel{s=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(s+t_0)} f(s)ds \\ &= e^{-it_0\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s} f(s)ds = e^{-it_0\omega} \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Dermed ser vi at forskyvning av funksjonen fører til at fouriertransformen multipliseres med en kompleks eksponensialfunksjon (vi sier at fouriertransformen *moduleres*).

Multiplikasjon med $\exp(i\omega_0 t)$ (*modulasjon*) av selve funksjonen forskyver fouriertransformen,

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega_0 t} f(t)dt = \hat{f}(\omega - \omega_0) = \hat{f}_{\omega_0}(\omega)$$

Modulasjon og forskyvning gjenspeiler hverandre, og slike "symmetrier" finner vi for flere av resultatene nedenfor:

Modulerer vi funksjonen, forskyver vi fouriertransformen, og omvendt.

Hvis vi har en funksjon $f(t)$, og vi lager oss en ny funksjon $g(t) = f(at)$ der $a > 0$, vil g bli en sammentrykket utgave av f hvis $a > 1$, og en utstrakt utgave av f hvis $a < 1$ (Dette ser en ved å tegne opp en kjent funksjon og la $a = 2$ og $1/2$, for eksempel). La oss beregne fouriertransformen til g :

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(at)dt \stackrel{s=at}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s/a} f(s) \frac{ds}{a} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Bortsett fra divisjonen med a , ser vi at hvis $a > 1$, vil funksjonen trykkes sammen, mens $1/a < 1$, og fouriertransformen strekkes utover:

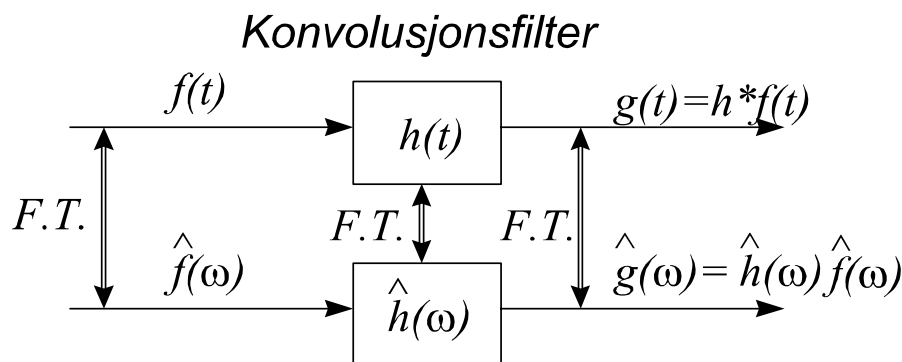


Figure 2: Filtre som kan representeres ved en konvolusjon er enklest å analysere ved hjelp av fouriertransformen.

Trykker vi funksjonen sammen, strekkes fouriertransformen utover, og omvendt.

(Husk at regelen *kun* dreier seg om å føre inn ny variabel $s = at$ i integralet!).

Neste egenskap om konvolusjon er fundamental:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega \tau} \hat{f}(\omega) d\tau = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Dette er uten tvil den aller viktigste enkeltegenskapen til fouriertransformen:

Fouriertransformen til en konvolusjon er produktet av fouriertransformene!

Setningen er naturligvis grunnen til at fouriertransformen er så velegnet til å analysere konvolusjonsfiltre: Hvis vi bruker fouriertransformen av signalene, blir effekten av filteret *en ren multiplikasjon* med fouriertransformen til impulsresponsfunksjonen! Fouriertransformen til impulsresponsfunksjonen kalles filterets *transferfunksjon*, jfr. fig. 2.

Fourierrekkene forenklet seg hvis vi hadde *like* og *odde* funksjoner, og det samme gjelder her også. Anta at f er en like funksjon, dvs. $f(t) = f(-t)$. Siden $f(t) \sin(\omega t)$ blir odde, vil $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt = 0$, og

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) f(t) dt.$$

Men i tillegg til dette ser vi at siden $\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$, vil faktisk $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$. Hvis f er like, er også $\hat{f}$ like!

På tilsvarende måte får vi hvis f er en odde funksjon. Da blir

$$\hat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt = -2i \int_0^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt.$$

$$f \text{ like/odde} \iff \hat{f} \text{ like/odde}.$$

Spesialformlene for like og odde funksjoner kan en utlede på sparket når en har bruk for dem. I begge tilfeller er det nok å kjenne funksjonen fra 0 til ∞ . Ellers kan funksjoner som i utgangspunktet er definert på intervallet $[0, \infty)$ *utvides* til like og odde funksjoner på $(-\infty, \infty)$, og dermed skrives som *cosinus-* eller *sinustransform*, som disse formlene ofte kalles.

Hvis f har *reelle* verdier, vil $\overline{\hat{f}(t)}$ være lik $f(t)$, der streken betyr kompleks konjugert. Dermed blir

$$\begin{aligned}\overline{\hat{f}(\omega)} &= \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt\right)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(-\omega).\end{aligned}$$

For positive ω vil $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$, og det er med andre ord nok å kjenne $\hat{f}$ for *positive* frekvenser i dette tilfellet. Siden signalene vi arbeider med ofte er reelle målinger, er dette en nyttig observasjon.

La oss nå se hva som skjer i forbindelse med derivasjon:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f'(t) dt = [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) e^{-i\omega t} f(t) dt \\ &= [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{+\infty} + (i\omega) \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Hvis $f(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \pm\infty$, vil første del forsvinne, og vi finner at $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$.

Ved hjelp av den inverse fouriertransformen kan vi finne ut hvilken funksjon som har $d\hat{f}/d\omega$ til fouriertransform:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d\hat{f}}{d\omega}\right\}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) d\omega = \left[\frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (it) e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\right]_{-\infty}^{\infty} - (it) f(t).\end{aligned}$$

Hvis $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow \pm\infty$, vil igjen første del forsvinne, og vi finner at $\mathcal{F}(-itf(t))(\omega) = \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$.

Den siste ligningen kan vi naturligvis også skrive $\mathcal{F}(tf(t))(\omega) = i \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$.

Deriveres funksjonen, multipliseres fouriertransformen med $i\omega$.

Multipliseres funksjonen med t , må vi derivere fouriertransformen og multiplisere med i .

En grei huskeregel for de to siste sammenhengene går ut på å derivere under integralet:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^{i\omega t}}{dt} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (i\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{i\omega \hat{f}(\omega)\}(t). \\ \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^{-i\omega t}}{d\omega} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (-it) f(t) dt = \mathcal{F}\{-itf(t)\}(\omega).\end{aligned}$$

Regel	Funksjon	Fouriertransform
Fouriertransformen er lineær	$af(t) + bg(t)$	$a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$
Forskyvning $\implies$ modulasjon	$f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$	$e^{-it_0\omega}\hat{f}(\omega)$
Modulasjon $\implies$ forskyvning	$e^{it\omega_0}f(t)$	$\widehat{f_{\omega_0}}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$
Funksjon sammen $\implies$ F.t. strekkes (og omv.)	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$
F.t. av en konvolusjon = produkt av F.t.-ene	$f * g(t)$	$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
f like $\iff \hat{f}$ like	$f(t) = f(-t)$	$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$
f odde $\iff \hat{f}$ odde	$f(t) = -f(-t)$	$\hat{f}(\omega) = -\hat{f}(-\omega)$
f reell $\implies \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$	$\overline{f(t)} = f(t)$	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$
Derivasjon	$f'(t)$	$i\omega \cdot \hat{f}(\omega)$
Multiplikasjon med t	$t \cdot f(t)$	$i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$
Fouriertransform av fouriertransform	$g(t) = \hat{f}(t)$	$\hat{g}(\omega) = 2\pi f(-\omega)$

Table 1: Regneregler for fouriertransformen

Vi forstår at med gjentatte delvise integrasjoner (eller bruk av reglene ovenfor) finner vi

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega),$$

$$\mathcal{F}((-it)^n f(t))(\omega) = \frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n}(\omega).$$

(I disse formlene ligger det krav om at de deriverte eksisterer og går raskt nok mot 0 når $|t|$ eller $|\omega| \rightarrow \infty$).

Til slutt skal vi ta med en regel som utnytter likheten mellom fouriertransformen og den inverse fouriertransformen. Hvis g er en funksjon som vi *vet* er en fouriertransform, for eksempel $g(t) = \hat{f}(t)$, kan vi finne $\hat{g}$ som følger:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s} g(s) ds \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-\omega)s} \hat{f}(s) ds \\ &= 2\pi f(-\omega).\end{aligned}$$

Tabell 1 summerer opp reglene som vi har utledet. Det greieste er å huske bevis-idéene, siden fortegn og faktorer vil variere med hvilken definisjon på fouriertransformen som brukes.

Oppgaver til dette avsnittet er samlet etter neste avsnitt.

4.3 Fouriertransformen til enkle funksjoner

Dessverre er det bare noen få funksjoner det er mulig å finne fouriertransformen til analytisk, men de som fins er viktige nok. Når vi regner, utnytter vi reglene fra forrige avsnitt.

Funksjonen $\Pi(t)$ er definert ved

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

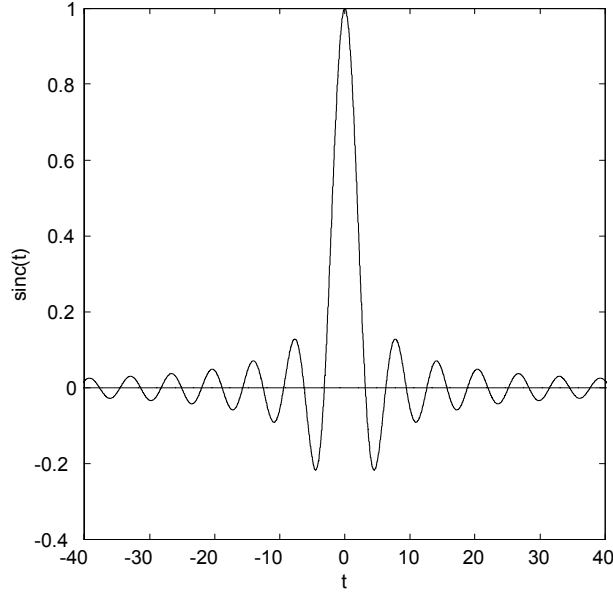


Figure 3: Funksjonen $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Vi har en dominerende midt-lobe og symmetriske svingninger til hver side.

Symbolet (stor π) illustrerer formen på grafen! Siden Π er en like funksjon, vil

$$\mathcal{F}(\Pi)(\omega) = 2 \int_0^\infty \Pi(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{1/2} \cos(\omega t) dt = \left[2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^{1/2} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}.$$

Funksjonen $\sin(x)/x$ forekommer så ofte at den har fått eget navn, nemlig *sinc-funksjonen*, $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Funksjonen er tegnet opp i figur 3.

Vi kan finne fouriertransformen til funksjonen $f(t) = \text{sinc}(t/2)$ ved å utnytte regelen om ”fourier-transform av fouriertransform”: $\hat{f}(\omega) = 2\pi\Pi(-\omega) = 2\pi$ for $|\omega| < 1/2$, 0 ellers. Dermed blir etter strekke-regelen

$$\mathcal{F}(\text{sinc}(t))(\omega) = \begin{cases} \pi, & |\omega| \leq 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

La oss sette $\Lambda(t) = \Pi * \Pi(t)$ og regne ut hva dette blir (det er litt vanskelig å se uten å tegne opp!):

$$\Lambda(t) = \Pi * \Pi(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Funksjonen ser ut som et telt, og symbolet (stor λ) er valgt deretter.

Ut fra det vi vet om fouriertransformen til en konvolusjon, har vi *uten videre* at

$$\mathcal{F}(\Lambda)(\omega) = \mathcal{F}(\Pi * \Pi)(\omega) = (\sin(\omega/2)/(\omega/2))^2 = \text{sinc}^2(\omega/2).$$

Også her kan vi utnytte regelen for å snu funksjon og transform, og strekke med en faktor 2:

$$\mathcal{F}(\text{sinc}^2(t))(\omega) = \begin{cases} \pi(1 - |\omega|/2), & |\omega| \leq 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Funksjon	Fouriertransform
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(\omega/2)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(\omega/2)$
$\text{sinc}(t)$	$\pi\Pi(\omega/2)$
$\text{sinc}^2(t)$	$\pi\Lambda(\omega/2)$
$e^{-\frac{1}{2}t^2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$
$e^{-t}, t > 0, 0 \text{ ellers}$	$\frac{1}{1+i\omega}$
$e^{- t }$	$\frac{2}{1+\omega^2}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{- \omega }$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{1}{2}(\delta(t-1) + \delta(t+1))$	$\cos(\omega)$
$\frac{1}{2i}(\delta(t-1) - \delta(t+1))$	$\sin(\omega)$
$\cos(t)$	$\pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))$
$\sin(t)$	$\pi i(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1))$

Table 2: Fouriertransformen til noen enkle funksjoner

De klokke-formede funksjonene $g(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$, kalles *gaussfunksjoner*. Funksjonen $g(t) = e^{-t^2/2}$ tilfredsstiller differensialligningen $dg/dt + tg = 0$, $g(0) = 1$ (Sett inn og sjekk!) Hvis vi tar fouriertransformen av ligningen, får vi fra derivasjonsregelen og regelen for multiplikasjon med t at $(i\omega)\hat{g} + i d\hat{g}/d\omega = 0$, som vi også kan skrive $d\hat{g}/d\omega + \omega\hat{g} = 0$, dvs. samme ligning! Dermed må $\hat{g}(\omega) = C e^{-\omega^2/2}$. Integralet $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ har verdien $\sqrt{2\pi}$, og dette gir oss C^1 :

$$\hat{g}(0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0t} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Følgelig blir $\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$. Bortsett fra faktoren $\sqrt{2\pi}$, er dette akkurat samme funksjon som vi startet med! Mer generelt er fouriertransformen av en gaussfunksjon igjen en gaussfunksjon (se oppg. 2).

Vi finner fouriertransformen til δ -funksjonen ved å anvende definisjonen:

$$\mathcal{F}(\delta)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = e^{-i\omega 0} = 1.$$

Fouriertransformen er altså identisk lik 1! Dette er egentlig ikke så overraskende siden $\delta * f = f$ for alle funksjoner f , og $\mathcal{F}(\delta * f)(\omega) = \hat{\delta}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

I tabell 2 har vi samlet del enkle fouriertransformer. Siste del av tabellen viser fouriertransformen til noen generaliserte funksjoner som vi ofte har bruk for. Det er ikke uten videre mulig å bruke definisjonen til å beregne disse fouriertransformene, men de utledes fra definisjonen på δ -funksjonen og de generelle egenskapene i tabell 1.

Oppgavene nedenfor er laget for at en skal bli kjent med regnereglene og noen av de vanligste funksjonene det er mulig å regne med. Bruk reglene framfor å prøve å regne direkte.

Oppgave 1: Finn fouriertransformen til funksjonen $f(t) = 2, |t| < 2, 0 \text{ ellers}$ (Regn den både ut direkte og ved å bruke strekke-regelen og fouriertransformen for Π).

¹Integralet $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ kan bestemmes ved å regne ut $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy$ ved hjelp av polarkoordinater.

Oppgave 2: Finn fouriertransformen til $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)}$, $\sigma > 0$, ved å benytte strekkeregelen.

Oppgave 3: Beregn fouriertransformen til $f(t) = e^{-t}$, for $t > 0$, 0 ellers (Husk at vi kan integrere $e^{-t-i\omega t}$ med hensyn på t slik vi er vant med).

Oppgave 4: Beregn fouriertransformen til $f(t) = e^{-|t|}$ ved å regne som i oppgave 3, og finn deretter fouriertransformen til $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Vis, uten ytterligere regning, at $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Oppgave 5: Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-(t-s)^2/2} ds.$$

(Vink: Uttrykk integralet som en konvolusjon).

Oppgave 6: Vis at hvis $G_{\sigma}(t)$ er funksjonen i oppg. 2, vil $G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2} = G_{\sigma}$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ (Benytt fouriertransformen til $G_{\sigma}(t)$ fra oppg. 2.)

Oppgave 7: Vis, ved hjelp av en passende fouriertransform i tabell 2, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

Oppgave 8: Finn fouriertransformen til $\cos(t)\Lambda(t)$ (Vink: Benytt Eulers formel for cosinus).

Oppgave 9: Vis, ved å bruke egenskapene til konvolusjon, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(t-s)^2} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+(t/2)^2}.$$

Oppgave 10: Vis at hvis en like funksjon har reelle verdier, vil også fouriertransformen være like og reell. Hva blir situasjonen for en odde funksjon med reelle verdier?

Oppgave 11: Vis, ved å bruke definisjonen på δ -funksjonen og Eulers formel, at

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\delta(t-1) + \delta(t+1))\right)(\omega) = \cos(\omega).$$

Finn deretter de tre andre fouriertransformene i tabell 2 (de to siste ved å bruke regelen om "fouriertransform av fouriertransform").

4.4 Energien i signaler

Fra elektrisitetstæren vet vi at effekten til en elektrisk varmeovn er gitt ved RI^2 , der R er motstanden og I strømmen. Over et tidsrom fra 0 til T_0 vil varmeovnen ha produsert energien

$$E = \int_0^{T_0} RI(t)^2 dt = R \int_0^{T_0} I(t)^2 dt.$$

Integralet av kvadratet av et signal $f(t)$ kalles for *energien* i signalet,

$$E(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Siden signalene kan ha komplekse verdier, skriver vi absoluttverdi. Husk at $|f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)}$. Tilslutt i dette avsnittet viser vi følgende sentrale setning, som kalles *Parsevals relasjon*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Når en har behov for å finne energien i signalet, kan en derfor velge om en integrerer kvadratet av selve signalet eller fouriertransformen til signalet. Det er vanlig å kalle funksjonen $\omega \rightarrow |\hat{f}(\omega)|^2$ for *frekvensspektret* eller *energisppektret* til f .

Parsevals relasjon er nyttig når en skal regne ut hvordan et konvolusjonsfilter påvirker energien i signalet. Hvis $g = h * f$, blir $\hat{g} = \hat{h} \cdot \hat{f}$, og følgelig

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(h * f)(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Det er for eksempel vanlig å benytte *lavpassfiltre* der $\hat{h}(\omega) = 1$ for $|\omega| \leq \omega_0$, 0 ellers. Da blir

$$E(g) = E(h * f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Bevis for Parsevals relasjon:

La funksjonen g være definert ved $g(t) = \overline{f(-t)}$. Da blir $\mathcal{F}(g) = \overline{\mathcal{F}(f)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \overline{f(-t)} dt \\ &\stackrel{s=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\omega s} \overline{f(s)} (-ds) \\ &= \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s) ds \right)} = \overline{\mathcal{F}(f)}(\omega). \end{aligned}$$

Dette er akkurat hva vi trenger:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(0-t) dt \\ &= f * g(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega 0} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Oppgave 1: Finn et uttrykk for energien til et signal etter at det har gått gjennom et filter med impulsrespons $h(t) = \text{sinc}(t)$.

Oppgave 2: Bestem hvordan filteret med impulsrespons $h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ påvirker energien i signalene, og beregn hvor mye mindre energien til utgangssignalet vil bli hvis inngangssignalet er $f(t) = \text{sinc}(t)$ (se oppg. 4 i avsnitt 4.3).

Oppgave 3: Vis den mer generelle versjonen av Parsevals relasjon ved å studere beviset ovenfor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

5 NOEN ANVENDELSER

5.1 Løsning av differensialligninger

Fourierrekker og fouriertransformer er blant de aller viktigste verktøyene vi har for å løse partielle differensialligninger. Selv om problemene vi ser på ofte representerer idealiserte situasjoner, gir løsningene likevel uvurderlig innsikt som en kan benytte i praktiske problemstillinger. Eksemplene nedenfor illustrerer bruk av fouriertransform i to slike situasjoner.

Varmeledningsligningen

La oss betrakte varmeledningsligningen for en uendelig lang stav:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t.$$

Her er $u(x, t)$ temperaturen som funksjon av x og t , og vi antar altså at varmediffusjonskoeffisienten er 1. Hvis vi som før søker etter separerte løsninger, $u(x, t) = X(x)T(t)$, finner vi $e^{-\omega^2 t} \cos(\omega x)$ og $e^{-\omega^2 t} \sin(\omega x)$ for *alle* verdier av ω (det blir ikke lenger bare spesielle verdier, siden vi ikke har randverdier som må tilfredsstilles). Dermed må vi kunne bygge opp løsninger fra basis-løsningene $u_\omega(x, t) = e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x}$ for $-\infty < \omega < \infty$ ved å sette

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} A(\omega) d\omega.$$

Vi får med andre ord et *integral* i stedet for en *sum* som vi hadde for en stav av endelig lengde. Hvis vi ønsker å tilpasse $u(x, 0) = f(x)$, ser vi umiddelbart at $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

Metoden blir ofte presentert ved å anta at vi har en løsning på formen

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} C(\omega, t) d\omega.$$

Denne setter vi inn i ligningen og får

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \omega^2 C \right) d\omega = 0$$

Dermed må $\frac{\partial C}{\partial t} + \omega^2 C = 0$ for alle ω , og vi får $C(\omega) = A(\omega) e^{-\omega^2 t}$, som ovenfor.

Funksjonen $e^{-\omega^2 t}$ er, som funksjon av ω , selv en fouriertransform (*NB!* merk at det er x og ω som hører sammen i fouriertransformen, t blir å oppfatte som en parameter!). Ved hjelp av tabell 1 og 2 finner vi

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\omega) = e^{-t\omega^2}.$$

Funksjonen $g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ kalles *varmeledningsligningens fundamentalløsning*. Grensen for g når $t \rightarrow 0$ er δ -funksjonen (Sjekk at g blir smalere og spissere jo mindre t er, mens $\int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx = 1$ for alle $t > 0$). Hele løsningen med $u(x, 0) = f(x)$ kan derfor alternativt skrives

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-\omega^2 t} \hat{f}(\omega) \right) (x, t) = (g * f)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} f(s) ds.$$

Det er lett å se at fundamentalløsningen for $t > 0$ er uendelig mange ganger deriverbar både i x og t . Konvolusjonen gjør at løsningen u ”arver” denne egenskapen fra g uansett hvordan f ser ut.

Bølgeligningen

Akkurat som for varmeledningsligningen kan vi betrakte bølger på en uendelig lang streng (eller i én dimensjon i et homogent medium):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Igjen gir separasjon av variable basisløsninger på formen

$$u_{\omega}(x, t) = C_1(\omega) e^{i\omega(x-ct)} + C_2(\omega) e^{i\omega(x+ct)},$$

og vi får generell løsning som et integral

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1(\omega) e^{i\omega(x-ct)} + C_2(\omega) e^{i\omega(x+ct)} \right) d\omega$$

(Merk at x og ω hører sammen). Alternativt kan vi *anta* at vi har en løsning på formen

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} C(\omega, t) d\omega,$$

som vi setter inn i ligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - c^2 (i\omega)^2 C \right) e^{i\omega x} d\omega = 0.$$

Dette gir oss $\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - c^2 (i\omega)^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + (c\omega)^2 C = 0$, med generell løsning $C(\omega, t) = C_1(\omega) e^{-i\omega ct} + C_2(\omega) e^{i\omega ct}$.

Hvis vi skal løse startverdiproblemet $u(x, 0) = f(x)$ og $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, setter vi opp

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\omega) + C_2(\omega)) e^{i\omega x} d\omega = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega c) (-C_1(\omega) + C_2(\omega)) e^{i\omega x} d\omega = 0. \end{aligned}$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} C_1(\omega) + C_2(\omega) &= \hat{f}(\omega), \\ -C_1(\omega) + C_2(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Dermed blir $C_1(\omega) = C_2(\omega) = \hat{f}(\omega)/2$, og vi får tilbake *d'Alemberts løsning* for dette tilfellet,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1(\omega) e^{i\omega(x-ct)} + C_2(\omega) e^{i\omega(x+ct)} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2} e^{i\omega(x-ct)} + \frac{\hat{f}(\omega)}{2} e^{i\omega(x+ct)} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct)). \end{aligned}$$

Samlingen av eksamensoppgaver inneholder en rekke oppgaver der fouriertransform brukes til å løse partielle differensialligninger. Merk at fouriertransformene i disse oppgavene vil avhenge av definisjonen, selv om løsningene på differensialligningene naturligvis ikke avhenger av dette.

5.2 Signalanalyse

Analyse av praktiske signalforløp vil alltid kreve at vi løser fourierintegralene numerisk, og det er gjort i dette og neste avsnitt. Neste kapittel gir en enkel innføring i numerisk fourieranalyse.

Signalet i fig. 4 viser et transient spenningsforløp i et høyspenningsnett rett etter at en bryter er slått på. Signalet viser tydelig en langsom og en hurtig variasjon. Den høyeste frekvensen i fouriertransformen til dette signalet er $\omega_{\max} = 2\pi \cdot 8\text{MHz}$. Den ”langsomme” variasjonen er bestemt ved å fouriertransformere signalet, sette fouriertransformen lik 0 for $|\omega| > \omega_{\max}/5$, og deretter fouriertransformere tilbake. Den høyfrekvente variasjonen er funnet på samme måte, men fouriertransformen er nå satt lik 0 for $|\omega| < \omega_{\max}/3$. ”Krøllene” på endene av de filtrerte signalene kommer av at den numeriske fouriertransformen oppfatter signalet som periodisk. Derfor bør en alltid sørge for at signalene som analyseres har noenlunde samme verdier i starten som på slutten (Det brydde vi oss ikke om her).

Figur 5 viser den månedlige solfleck-aktiviteten fra 1749 fram til 1991. Signalet har et noe uregelmessig periodisk forløp. Ved å fouriertransformere signalet kan en identifisere perioden mer nøyaktig. Energispektret viser en tydelig topp på frekvensen $.0905 (\text{år})^{-1}$, som tilsvarer en periode på 11.05 år.

5.3 Filtrering av bilder

Et bilde kan ses på som en funksjon av to variable der koordinatene $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ gir oss posisjonen i bildet og verdiene er gråtonen (fargebilder må ha tre verdier). Fourieranalyse av bilder krever at vi bruker *todimensjonal fouriertransform*. Den er definert på tilsvarende måte som den endimensjonale. I stedet for vinkelfrekvens ω brukes *bølgetall*, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, som er en vektor med to komponenter:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{k}) &\triangleq \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbf{R}^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

(Her står $\mathbf{k}\mathbf{x}$ for skalarproduktet, $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2$). Den todimensjonale fouriertransformen er derfor også en funksjon av to variable, (k_1, k_2) . Utregning av todimensjonale fouriertransformer skjer ved hjelp av itererte integraler, og transformen har tilsvarende egenskaper som i tabell 1. Vi

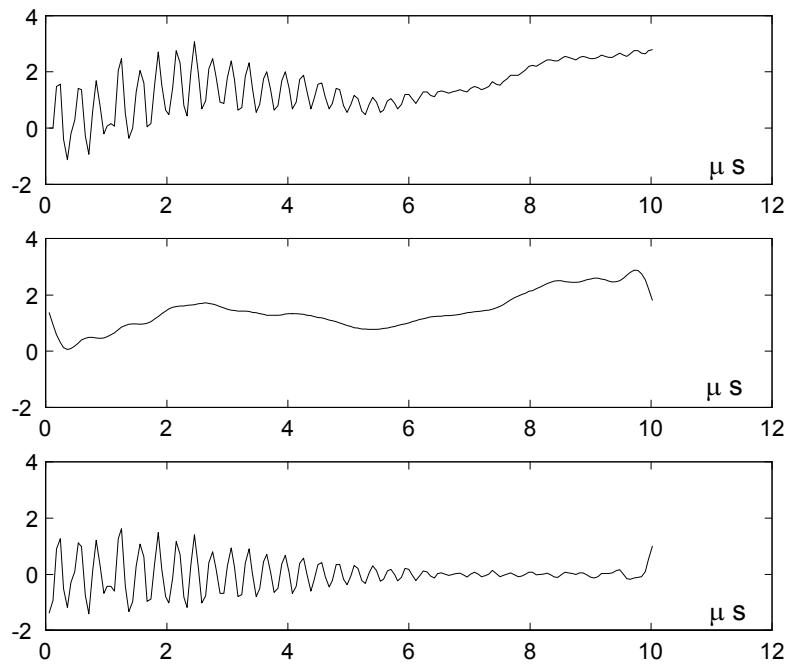


Figure 4: Transiente spenningsvariasjoner i et høyspenningsnett (Fra forsker A. P. Brede, EFI). *Øverst:* Det originale signalet. *Midten:* Lavpassfiltrert signal. *Nederst:* Høypassfiltrert signal.

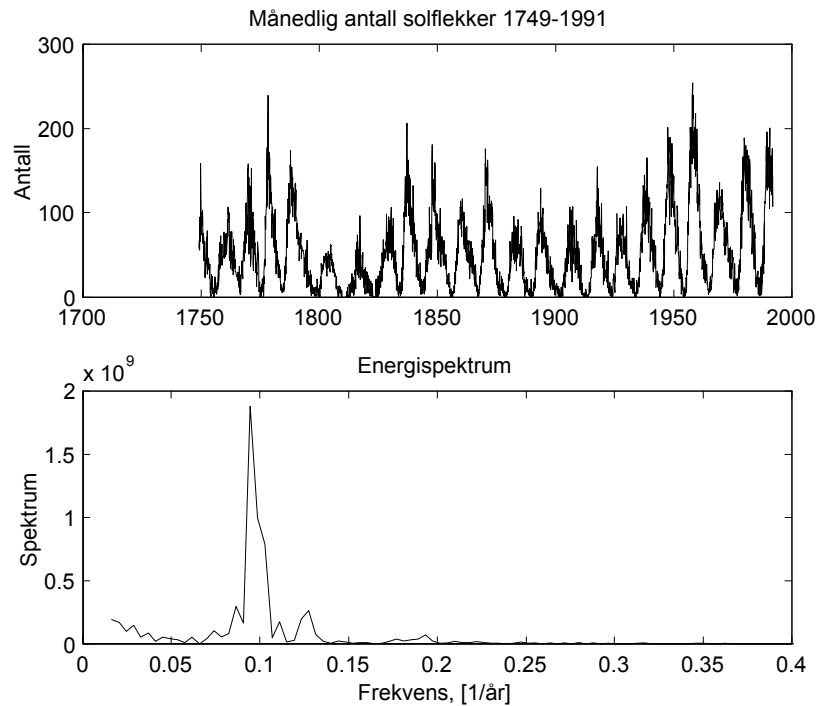


Figure 5: *Øverst:* Månedlig antall solflekker fra 1749 til 1991. *Nederst:* Energispektrum for signalet.

viser til Bracewell for en nærmere gjennomgang av regnereglerne og fine illustrasjoner av de enkleste funksjonene.

Portrettet av *Lena* i fig.6 er det mest kjente bildet i digital bildebehandling. Damen påstås å bo sør for Stockholm og har forlenget blitt bestemor. Bildet har 512×512 bilde-elementer, eller *pixler*, og figurene er beregnet ved hjelp av de todimensjonale FFT-rutinene i *MATLAB*. Lavpassfilteret setter fouriertransformen 0 utenfor den viste sirkelskiven vist i fig. 7, og høypassfilteret gjør akkurat omvendt. Et lavpassfilter framhever de langsomme variasjonene i bildet, mens et høypassfilter framhever raske variasjoner, dvs. kanter. Impulsresponsen til lavpassfilteret kan uttrykkes ved hjelp av Besselfunksjonen $J_0(r)$.

6 DISKRET FOURIERANALYSE

6.1 Diskret fouriertransform

Hvis vi skal beregne fourierkoeffisienter til en funksjon med periode 2π numerisk, er det enkleste uttrykket vi kan tenke oss en sum på formen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) f(t) dt \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(k \frac{2\pi}{N} n) f(\frac{2\pi}{N} n) \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Det viser seg pussig nok at denne *Riemannsummen* er noe av det mest nøyaktige som kan brukes for periodiske funksjoner. Vi får et tilsvarende uttrykk for b_k , og kan slå begge formlene sammen ved å sette

$$a_k - ib_k \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos(k \frac{2\pi}{N} n) - i \sin(k \frac{2\pi}{N} n) \right) f(\frac{2\pi}{N} n) \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi kn/N} f(\frac{2\pi}{N} n).$$

Den siste summen kalles for en *diskret fouriertransform*, forkortet *DFT*. Generelt er DFT definert for en vektor $X = \{X(n)\}_{n=0}^{N-1}$ av lengde N ved

$$\hat{X}(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i n k / N} X(n), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

og $\hat{X}$ kalles for (den diskrete) fouriertransformen til X (Det er en smaksak om en lar n gå fra 0 til $N-1$, eller fra 1 til N . *MATLAB* bruker det siste).

Dette er en endelig sum, og den *inverse diskrete fouriertransformen* (*IDFT*) blir

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i n k / N} \hat{X}(k), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Også her vil definisjonene variere. Det er for eksempel vanlig å bytte $-$ og $+$ i eksponentene, og ellers bruke normeringer 1 , $1/\sqrt{N}$, eller N^{-1} .

Summene i DFT og IDFT er litt spesielle. Hvis en i siste formel i stedet for n setter inn $n + mN$ for et helt tall m , blir alle leddene, og dermed også summen, uendret:

$$e^{2\pi i (n+mN)k/N} = e^{2\pi i n k / N} e^{2\pi i m k} = e^{2\pi i n k / N} \cdot 1 = e^{2\pi i n k / N}.$$

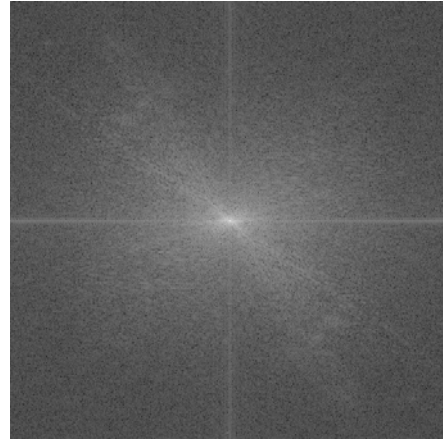


Figure 6: *Lena*, originalt bilde 512×512 pixels, 256 gråtoner (øverst, venstre). Absoluttverdien til fouriertransformen av *Lena* (øverst, høyre). Merk at *origo* ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$) er plassert midt på bildet. Lavpassfiltrert bilde (nederst, venstre). Høypassfiltrert bilde (nederst, høyre). Merk at *origo* ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$) er plassert midt på bildet. Gråtonen gir en indikasjon på funksjonsverdien.



Figure 7: Lavpassfilterets transferfunksjon (venstre) og impulsresponsfunksjon (høyre). Programmet hadde en liten *bug*, slik at senteret for sirkelen i bølgetallsplanet er ett steg fra origo i hver retning. Derfor er ikke impulsresponsen helt sirkulær.

Noen ganger er det derfor greit å oppfatte vektorene X og $\hat{X}$ som *periodiske* med periode N . Det er ikke vanskelig å vise formelen for IDFT hvis en først overbeviser seg om at

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i r n / N} = \begin{cases} N, & r = mN, m \text{ et heltall,} \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det viser seg igjen at alle regnereglene i tabell 1 (som det har mening å snakke om her) har analogier for DFT og IDFT. De er ikke vanskelige å vise, og står omtalt i begge bøkene i referanselisten.

Likheten mellom DFT og IDFT gjør at det er enkelt å bruke samme dataprogram til å beregne både DFT og IDFT. Ellers kan to-dimensjonal diskret fouriertransform beregnes som en serie en-dimensjonale. I det hele tatt viser det seg at *all praktisk fourieranalyse til slutt reduserer seg til å beregne DFT!*

Fra definisjonen på DFT ser vi at en for hver av de N k -verdiene må beregne en sum med N summander. Dette utgjør omtrent N^2 summer og addisjoner. Ved å organisere beregningen på en smart måte, viser det seg at det er mulig å redusere dette antallet betraktelig. Faktisk kan en, hvis $N = 2^r$, redusere antallet til $2Nr$, dvs. en faktor $(2Nr)/N^2 = 2r/N$. Hvis $N = 2^{10}$, er derfor dette forholdet omlag $1/50!$ Algoritmen kalles *Fast Fourier Transform* (FFT). Det er ikke nødvendig å skjønne hvordan FFT virker for å bruke DFT, men begge bøkene i referanselisten forklarer dette i detalj.

Oppgave 1: Vis at $\hat{X}$ kan uttrykkes som en *fouriermatrise*, $\mathbf{F}$, multiplisert med vektoren X , $\hat{X} = \mathbf{F}X$. Finn den inverse matrisen, $\mathbf{F}^{-1}$, fra IDFT.

Oppgave 2: Hvordan blir matrisene i oppgave 1 for DFT og IDFT når $N = 2, 3$ og 4 ?

Oppgave 3: La $X(0) = 1$, og $X(n) = 0$ for $n = 1, \dots, N-1$. Beregn $\hat{X}$. Bestem også $\hat{X}$ når $X(n) = 1$ for $n = 0, \dots, N-1$. Hva minner dette om?

Oppgave 4: Sett $w = e^{-2\pi i / N}$, slik at $\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)w^{kn}$. Vis at $\sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} = \frac{w^{kN}-1}{w^k-1}$ når $k \neq mN$, der m er et helt tall, og fra dette formelen for IDFT.

6.2 Sampling

I dette avsnittet skal vi gi en kort innføring i samplingsteori. Ved at en registrerer et kontinuerlig signal bare i diskrete punkter, kan en alltid risikere å miste noe informasjon. Måler vi for sjelden (*undersampler*), mister vi kanskje raske variasjoner vi skulle fått med, sampler vi for ofte derimot (*oversampler*), får vi unødvendig store datamengder.

Anta vi har et instrument som sampler kun for $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Hvis vi da registrerer signalet $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, dvs. finner $\{\sin(\omega_0 n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, vil målingene gi oss et godt bilde av signalet så lenge ω_0 er liten, og vi har mange målepunkter pr. periode. Etterhvert som ω_0 øker, får vi problemer med å oppfatte hva vi måler på. Hvis ω_0 for eksempel øker med 2π , vil

$$\sin((\omega_0 + 2\pi)n) = \sin(\omega_0 n + 2\pi n) = \sin(\omega_0 n).$$

Vi får med andre ord *nøyaktig samme måleserie*, og på grunnlag av målingene er det umulig for oss å avgjøre om vinkelfrekvensen er ω_0 eller $\omega_0 + 2\pi$! Enda verre, det samme problemet oppstår for *alle* frekvenser $\omega_0 + 2\pi m$, der m er et helt tall. Hvis vi observerer $e^{i\omega_0 t}$, vil alt gå bra så lenge som ω_0 er mellom $-\pi$ og π , men kommer ω_0 ut av dette området, vil vi på grunnlag av målingene oppfatte frekvensen feil: Det fins alltid et helt tall m slik at $\omega_0 - 2\pi m = \omega_1 \in (-\pi, \pi]$, og vi tror, på grunnlag av målingene, at vi observerer $e^{i\omega_1 t}$ i stedet for $e^{i\omega_0 t}$. Det er nettopp dette fenomenet som gjør at kjerrehjulene på gamle westernfilmer går baklengs! Hvis ω_0 er en frekvens i $(-\pi, \pi]$, og signalet som vi måler på er

$$a \exp(i\omega_0 t) + b \exp(i(\omega_0 + 2j\pi)t) + c \exp(i(\omega_0 + 2k\pi)t),$$

der j og k er hele tall forskjellig fra 0, vil vi oppfatte dette som

$$(a + b + c) \exp(i\omega_0 t),$$

og det blir umulig for oss å bestemme a , b og c !

I signalbehandling kalles dette *folding* (eng. *aliasing*), og vi forstår at samme problem oppstår hvis vi sampler med avstand Δt . Da går det bra så lenge $\omega_0 \in (-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$. Frekvenser utenom dette intervallet vil igjen oppfattes feil. Grensefrekvensen kalles *Nyquist(vinkel)frekvensen*, $\omega_{Nyq.} = \pi/\Delta t$. Hvis vi opererer med vanlig frekvens ν , blir $\nu_{Nyq.} = \omega_{Nyq.}/2\pi = \frac{1}{2\Delta t}$. Det er vanlig å kalle Δt for *sampleingsintervallet* og $1/\Delta t$ for *sampleingsfrekvensen*:

Nyquistfrekvensen er halvparten av sampleingsfrekvensen!

Vi ender opp i samme uføre hvis vi prøver å finne fouriertransformen fra det samplede signalet,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta t} f(n \Delta t) \Delta t.$$

Høyresiden er *periodisk* i ω med periode $2\pi/\Delta t$ siden vi for alle hele tall k har

$$\exp\left(-i\left(\omega + k\frac{2\pi}{\Delta t}\right)n\Delta t\right) = \exp(-i\omega n\Delta t + kn2\pi) = \exp(-i\omega n\Delta t).$$

For de fleste normale funksjoner vil $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow \pm\infty$. Derfor kan vi i beste fall håpe på at summen er en rimelig tilnærming til $\hat{f}(\omega)$ i intervallet $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$. Utenom dette intervallet kan vi generelt ikke si noe som helst.

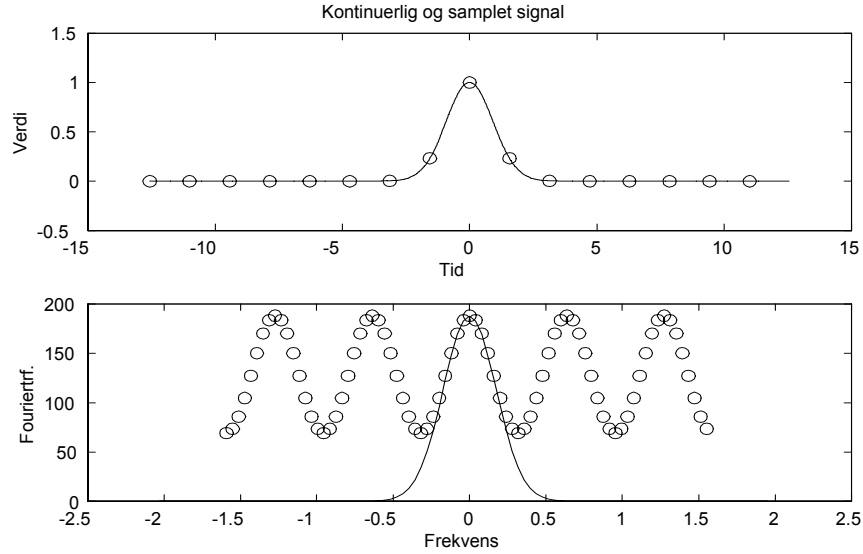


Figure 8: Øverst: Kontinuerlig signal og samplet signal angitt med 'o' på kurven. Nederst: fouriertransform for det kontinuerlige og det diskrete signalet.

I figur 8 er effekten av sampling vist for et meget enkelt signal. Legg merke til at selv om samplingen er temmelig grov, får vi en god tilnærmelse rundt toppen i fouriertransformen. Nyquistfrekvensen er i dette tilfellet $1/\pi \approx .32$, siden $\Delta t = \pi/2$. Tilnærmelsen blir dårlig når vi nærmer oss Nyquistfrekvensen, og utenfor intervallet $(-1/\pi, 1/\pi)$ er fouriertransformen til det samplede signalet til ingen hjelp.

Det viser seg at det finnes en enkel *eksakt* sammenheng mellom summen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta t} f(n \Delta t) \Delta t$ og $\hat{f}$ som kalles *Poissons summeringsformel*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta t} f(n \Delta t) \Delta t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}\right).$$

Vi vil ikke gå inn på beviset, men legg merke til at høyresiden, slik som venstresiden, også har periode $\frac{2\pi}{\Delta t}$! Hvis vi tar ut summanden for $k = 0$ på høyre side spesielt, får vi for $|\omega| < \pi/\Delta t$:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta t} f(n \Delta t) \Delta t - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}\right).$$

Siste ledd på høyre side kalles *foldingsbidraget*, og er det som kan komme inn og ødelegge for oss, også når $|\omega| < \pi/\Delta t$. Legg merke til at foldingsbidraget bare inneholder verdier av $\hat{f}$ utenfor intervallet $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$. I praksis vil en derfor prøve å velge samplingsfrekvensen så høy at foldingsbidraget blir lite.

Hvis vi skulle være så heldige at $\hat{f}(\omega) = 0$ når $|\omega| > \pi/\Delta t$, vil foldingsbidraget bli 0. Da kan vi, ved å beregne summen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta t} f(n \Delta t) \Delta t$ for $|\omega| < \pi/\Delta t$, kunne bestemme *hele* $\hat{f}$! Det er med andre ord tilstrekkelig å kjenne $f(t)$ i samplingspunktene $t = n \Delta t$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, i dette tilfellet. Vi må dermed også kunne bestemme hele f fra de samplede verdiene. Dette viser seg å være riktig, og følgende resultat er hovedteoremet i samplingsteorien:

Samplingsteoremet: Hvis $\hat{f}(\omega) = 0$ for $|\omega| \geq \pi/\Delta t$, så kan $f(t)$ rekonstrueres fra de samplede funksjonsverdiene tatt i $t = n\Delta t$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, og

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \frac{\sin(\pi(\frac{t}{\Delta t} - n))}{\pi(\frac{t}{\Delta t} - n)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \operatorname{sinc}(\pi(\frac{t}{\Delta t} - n))$$

(Begge bøkene i referanselisten omtaler og beviser samplingsteoremet).

På en musikk-CD er signalet lagret digitalt og samplet med en frekvens på omkring 40 kHz. Nyquist-frekvensen er dermed 20 kHz, som også er omtrent øvre grense for det menneskelige øre. Under opptak vil første steg være å sende signalet gjennom et *lavpassfilter* som sørger for å ”klippe vekk” bidraget fra frekvenser i fouriertransformen over 20 kHz. Dermed unngår en at disse bidragene ødelegger fouriertransformen til det hørbare lydsignalet for frekvenser under 20 kHz pga. folding. Dette kan være elektronisk støy (f.eks. fra radio og mobiltelefon) som kan foldes inn i signalet fra langt utenfor det hørbare frekvensområdet. Det såkalte *anti-foldingsfilteret* er dermed meget viktig: Har en først samplet og fått foldet ”støy” inn i signalet, er det ødelagt for godt. Etter denne innledende operasjonen har vi klippet vekk deler av signalet vi ikke kunne høre likevel, og fått et signal som er begrenset til frekvenser under Nyquistfrekvensen. Dermed kan vi trygt sample signalet i en *analog-til-digital (AD) converter*. I avspilleren må det digitale signalet over på analog form igjen, d.v.s. vi trenger en *digital-til-analog (DA) converter* som er en realisasjon av samplingsteoremet (dette er en *meget enkel beskrivelse* i forhold til dagens CD-teknologi!).

Hvis vi har behov for å beregne fouriertransformen til en funksjon numerisk, må vi altså benytte DFT. Da må vi først finne et intervall $[t_0, t_0 + N\Delta t]$ der f er forskjellig fra null, og (for praktiske formål) lik null utenfor. Vi må også sørge for at samplingsintervallet Δt er lite nok til at foldingsfeilen er liten. Da vil, for $|\omega| < \frac{\pi}{\Delta t}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega(t_0+n\Delta t)} f(t_0 + n\Delta t) \Delta t \\ &= \Delta t e^{-i\omega t_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega n\Delta t} f(t_0 + n\Delta t). \end{aligned}$$

Vi setter naturligvis $X(n) = f(t_0 + n\Delta t)$, $n = 0, \dots, N-1$, og beregner $\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i n k / N} X(n)$. DFT vil ikke gi oss alle mulige frekvenser, siden eksponensialfunksjonene har formen $e^{-i2\pi k n / N}$. Vi vil bare få frekvensene som oppfyller

$$-i\omega n\Delta t = -i2\pi k n / N,$$

med andre ord, kun $\omega = \frac{2\pi k}{N\Delta t}$. Verdiene på k er i utgangspunktet fra 0 til $N-1$, men summen hadde jo den spesielle egenskapen at verdien ble den samme om k endret seg med et multiplum av N . Vi kan derfor la k gå fra $-N/2$ til $N/2$, og finner $\hat{f}(\omega)$ for $|\omega| < \frac{2\pi(N/2)}{N\Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t}$. Oppløsningen i ω er $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$, og den blir finere og finere ettersom N vokser. Frekvensområdet er imidlertid bestemt av samplingen og vil alltid være mellom $-\frac{\pi}{\Delta t}$ og $\frac{\pi}{\Delta t}$, uansett hvor stor N er.

Oppgave 1: Vis at formelen i samplingsteoremet virkelig interpolerer dataene, dvs. går nøyaktig gjennom datapunktene (Vink: Finn ut hvordan $\operatorname{sinc}(\pi \frac{t}{\Delta t})$ går!).

6.3 FFT-programmer

En programpakke for FFT er et sentralt verktøy i all digital signalbehandling. Alle større samlinger av numerisk programvare, for eksempel *MATLAB*, *Maple*, *Mathematica*, *NAG* og *Numerical Recipes* har gode programmer for FFT. *MATLAB*s rutiner er spesielt enkle å bruke (sjekk ”`help fft`”).

Konstruksjon av FFT-algoritmer er en egen gren av numerisk matematikk. Ofte er FFT-algortimene spesielt tilpasset datamaskin-arkitekturen, og disse rutinene vil normalt være mye mer effektive enn generelle rutiner.

Det er viktig å vite hvordan fouriertransformen er definert for programpakken som skal brukes:

- Er det $+$ eller $-$ i eksponensialfunksjonene i definisjonen?
- Er normeringsfaktoren foran summen 1 , $1/N$ eller $1/\sqrt{N}$?

Når en skal teste ut en ny FFT-algoritme, kan det være nyttig å prøve den på en vektor med lengde 4 for å sjekke at den virkelig utfører beregningene slik som det synes å gå fram fra beskrivelsen. Det er også nyttig å sjekke at forlengs og invers fouriertransform tilsammen gir samme resultat som vi startet med.

For noen anvendelser, spesielt ved 2D-FFT, er det gunstig at *origo* er plassert midt på dataarrayet (Jfr. fig. 7). Dette krever en omstokking av resultatet, og mange pakker (for eksempel *MATLAB*) har allerede dette i form av egne rutiner.

FFT-algoritmen er spesielt effektiv for dataserier der antallet elementer er en potens av 2. I mange anvendelser kan en uten betydning for resultatet legge til nuller i dataserien (Dette gjelder for eksempel hvis en kun er interessert i energispektret). Ofte vil det da lønne seg å forlenge dataserien opp til en potens av 2. Selv om FFT-pakken tillater serier av vilkårlig lengde, vil det være gunstig å holde seg til potenser av 2 hvis en skal utføre mange fouriertransformasjoner.

Når dette skrives, er den beste FFT-pakken antagelig FFTW (”*The Fastest FFT in the West!*”) laget av Matteo Frigo og Steven G. Johnson ved M.I.T. De fikk i 1999 *J. H. Wilkinson Prize for Numerical Software* for utviklingen av pakken som består (i alle fall når vi fikk tak i den) av omlag 40000 C-linjer. Mer informasjon på <http://www.fftw.org>.

7 FASIT TIL OPPGAVENE

2. FILTRE

Oppgave 1:

(a) Filteret er *lineært og stasjonært* (Regn ut $\frac{d^2}{dt^2} (af(t) + bg(t)) + 2(af(t) + bg(t))$, og se at det stemmer).

(b) Filteret er *lineært*, men *ikke stasjonært* (Ta først en funksjon f som er $\neq 0$ bare i en liten omegn om $t = 0$. Forskyv deretter funksjonen til π før du anvender filteret).

(c) Filteret er *lineært* siden integralet er det. Stasjonariteten kan sjekkes slik:

$$g(t - t_0) = \int_0^{t-t_0} f(\tau) d\tau,$$

$$T(f_{t_0})(t) = \int_0^t f(\tau - t_0) d\tau \stackrel{\tau - t_0 = s}{=} \int_{-t_0}^{t-t_0} f(s) ds.$$

For at $g_{t_0} = T(f_{t_0})$, må altså (i det siste integralet) $\int_{-t_0}^0 f(s) ds = 0$, og det er jo generelt ikke riktig. Filteret er altså *ikke stasjonært*.

(d) Dette enkle filteret er *stasjonært*, men pussig nok *ikke* lineært:

$$\begin{aligned} T(f + g)(t) &= (f(t) + g(t)) + 1 = \\ &= (f(t) + 1) + (g(t) + 1) - 1 = \\ &= T(f) + T(g) - 1. \end{aligned}$$

En ekstra -1 ødelegger for lineariteten.

(e) Dette er et vanskelig spørsmål som baserer seg på at løsningen til ligningen kan uttrykkes som

$$g(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{\tau} f(\tau) d\tau.$$

(bare partikulærløsningen er aktuell siden homogenløsningen Ce^{-t} dør ut). Filteret er i alle fall *lineært* siden integralet er det. Stasjonariteten er noe verre å vise:

$$\begin{aligned} g_{t_0}(t) &= g(t - t_0) = e^{-(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-t} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{\tau+t_0} f(\tau) d\tau \stackrel{\tau+t_0=s}{=} e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s f(s - t_0) ds = \\ &= T(f_{t_0})(t). \end{aligned}$$

Altså er filteret også stasjonært.

Oppgave 2:

Dette er ren innsetting.

3. KONVOLUSJON

Oppgave 1: Første identitet følger direkte fra definisjonen. I siste identitet må vi bytte integrasjonsrekkefølgen i dobbelintegralet vi ender opp med.

Oppgave 2: En *seriekobling* er for eksempel

$$f \xrightarrow{h_1*} g = h_1 * f \xrightarrow{h_2*} k = h_2 * g.$$

Siden $k = h_2 * (h_1 * f) = (h_2 * h_1) * f$, tilsvarer dette et "kombinert" konvolusjonsfilter, $f \rightarrow k = h * f$, der $h = h_2 * h_1$. Videre er $h_2 * h_1 = h_1 * h_2$, slik at rekkefølgen er uten betydning.

Oppgave 3: Vi bruker at

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} * f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) f(t - \tau) d\tau \stackrel{s=\tau-t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) f(t - (s + t_0)) ds \\ &= f(t - (0 + t_0)) = f(t - t_0). \end{aligned}$$

Oppgave 4: Vi bruker vinket og oppgave 3:

$$\begin{aligned}(\delta_{t_0} * \delta_{t_1}) * f &= \delta_{t_0} * (\delta_{t_1} * f)(t) = (\delta_{t_1} * f)(t - t_0) \\ &= f(t - t_0 - t_1) = f_{t_0+t_1}(t) = \delta_{t_0+t_1} * f(t).\end{aligned}$$

Oppgave 5: Filteret er et *konvolusjonsfilter* som kan skrives $f \rightarrow h * f$, med $h(t) = e^{-t^2}$.

Oppgave 6: Siden f er kontinuert i t , vil $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n) = f(t)$.

Oppgave 7: Venstresiden kan skrives

$$\frac{n}{2} \left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} \right) * f(t) = \frac{f(t - 1/n) - f(t + 1/n)}{\frac{2}{n}}.$$

Dette vil konvergere mot $-f'(t)$ når $n \rightarrow \infty$.

Oppgave 8:

$$\max_t h * f(t) = \max_t \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \max_t f(t - \tau) d\tau = \max_t f(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = \max_t f(t).$$

Tilsvarende for minimum.

4 FOURIERTRANSFORMEN

4.3 Fouriertransformen til enkle funksjoner

Oppgave 1: $\hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

Oppgave 2: Vi vet (fra tabell 1 og 2) at $e^{-t^2/2} \Leftrightarrow \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$, og at $f(at) = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{\omega}{a})$. Ved å sette $a = 1/\sigma$, finner vi $\hat{G}(\omega) = e^{-(\sigma\omega)^2/2}$.

Oppgave 3: $\hat{f}(\omega) = (i\omega + 1)^{-1}$.

Oppgave 4: $e^{-|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{\omega^2 + 1}$ og $\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$. Videre $\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Oppgave 5: Siden

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-(t-s)^2/2} ds = (\Pi * e^{-t^2/2})(t),$$

blir $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \text{sinc}(\omega/2)$.

Oppgave 6: Bruk at $\mathcal{F}(G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2})(\omega) = e^{-(\sigma_1\omega)^2/2} e^{-(\sigma_2\omega)^2/2} = e^{-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2/2} = e^{-(\sigma\omega)^2/2}$.

Oppgave 7: Vi benytter at $\text{sinc}^2(t) \Leftrightarrow \pi \Lambda(\omega/2)$. Da er $\mathcal{F}(\text{sinc}^2)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t) dt$.

Oppgave 8: Benytter at $\mathcal{F}(e^{iat} f)(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$. Fouriertransformen er

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} (e^{i1t} + e^{-i1t}) \Lambda(t) \right\} (\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega - 1}{2} \right) + \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega + 1}{2} \right) \right\}.$$

Oppgave 9: Integralet er $\frac{1}{1+t^2} * \frac{1}{1+t^2}$ med fouriertransform $(\pi e^{-|\omega|})(\pi e^{-|\omega|}) = \pi(\pi e^{-|2\omega|})$. På den annen siden har, etter strekkeregelen, funksjonen $\frac{1}{1+(t/2)^2}$ fouriertransformen $\pi 2 e^{-|2\omega|}$. Det med bli svaret $\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+(t/2)^2}$.

Oppgave 10: Hvis funksjonen har reelle verdier, vil

$$\overline{\hat{f}(-\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(\omega).$$

Siden f er like, vil $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$. Siden både $\hat{f}(-\omega)$ og $\overline{\hat{f}(-\omega)}$ er lik $\hat{f}(\omega)$, må fouriertransformen være reell ($z = \bar{z}$ bare hvis $\text{Im}(z) = 0$).

Oppgave 11: Bruk vinkene i oppgaveteksten.

4.4 Energien i signaler

Oppgave 1: Transfer-funksjonen er $\hat{h}(\omega) = \pi\Pi(\omega/2)$, og energien på utgangssignalet blir

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Oppgave 2: Transferfunksjonen blir $\hat{h}(\omega) = e^{-|\omega|}$, og vi får energien på utgangssignalet

$$\begin{aligned} E_{ut} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|\omega|}|^2 |\pi\Pi(\omega/2)|^2 d\omega \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 e^{-2|\omega|} d\omega = \pi \int_0^1 e^{-2|\omega|} d\omega = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2}) \approx 1.3582 \end{aligned}$$

Energien på inngangssignalet blir

$$\begin{aligned} E_{inn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Pi(\omega/2)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \pi^2 d\omega = \pi. \end{aligned}$$

6.1 Diskret fouriertransform

Oppgave 1: $\mathbf{F} = \{f_{mn}\}_{m,n=0}^{N-1}$, $f_{mn} = (e^{-i2\pi/N})^{mn}$. $\mathbf{F}^{-1}$ har elementer $(e^{i2\pi/N})^{mn}/N$.

Oppgave 2: For $N = 2$ får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De andre er overlatt til leseren.

Oppgave 3: $\hat{X}(k) = 1$ for alle k . Når $X(n) = 1$ for $n = 0, \dots, N-1$, $\hat{X}(0) = 1/N$, og alle de andre 0. Dette minner om δ -funksjonen.

Oppgave 4: Husk formelen for geometrisk rekke.

6.2 Sampling

Oppgave 1: Benytt vinket i oppgaven.

8 REFERANSEBØKER

Bracewell, R.N.: *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1986.

Brigham, E.O.: *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, 1974.

Begge bøkene er greie lærebøker/oppslagsverk. Bracewell inneholder også mye stoff om andre transformtyper, og Brigham dekker både kontinuerlig og diskret fouriertransform i tillegg til hovedtemaet, FFT.