

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 45 45 55 33

KONTINUASJONSEKSAMEN TFY4160 BØLGEFYSIKK

Torsdag 12. august 2010 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.

Side 2 - 5: Oppgavene.

Side 6 - 14: Vedlegg, Formelsamling.

Prøven består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene normalt vil telle under vurderingen. Vektorstørrelser angis med **fete** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren er klar senest 1. september.

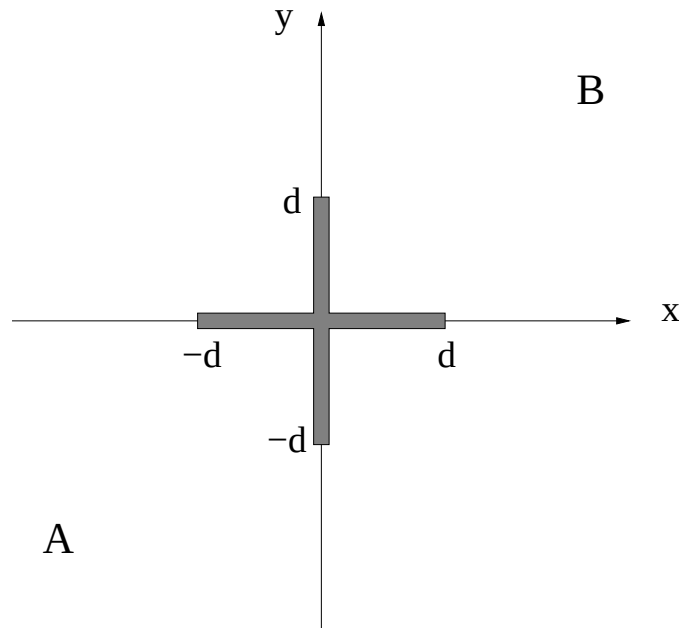
OPPGAVE 1 [1a og 1b teller 10% hver]

a) En gitarstreng med lengde $L = 70$ cm er festet i begge ender (dvs knutepunkter der). Grunntonen (dvs laveste resonansfrekvens) og overtonene genereres av stående transversale bølger på strengen. Den skal stemmes slik at grunntonen er en G med frekvens $f = 196$ Hz. Strengen har sirkulært tverrsnitt med radius $R = 0.25$ mm og er laget av stål, med massetetthet $\rho = 7800$ kg/m³.

• Bestem bølgelengden λ og bølgehastigheten v til 1. overtone (dvs nest laveste resonansfrekvens). Med hvor stor strekk-kraft S må strengen strammes?

• Du og din venn Ole befinner dere på hver deres vogn som triller bort fra hverandre, med hastighet (relativt til bakken) henholdvis 10 m/s (du) og 25 m/s (Ole). Ole sitter og klimprer på G-strengen på gitaren sin. Hvilken frekvens vil grunntonen ha i dine ører? (Lyden fra gitaren forplanter seg i luft med hastighet 340 m/s.)

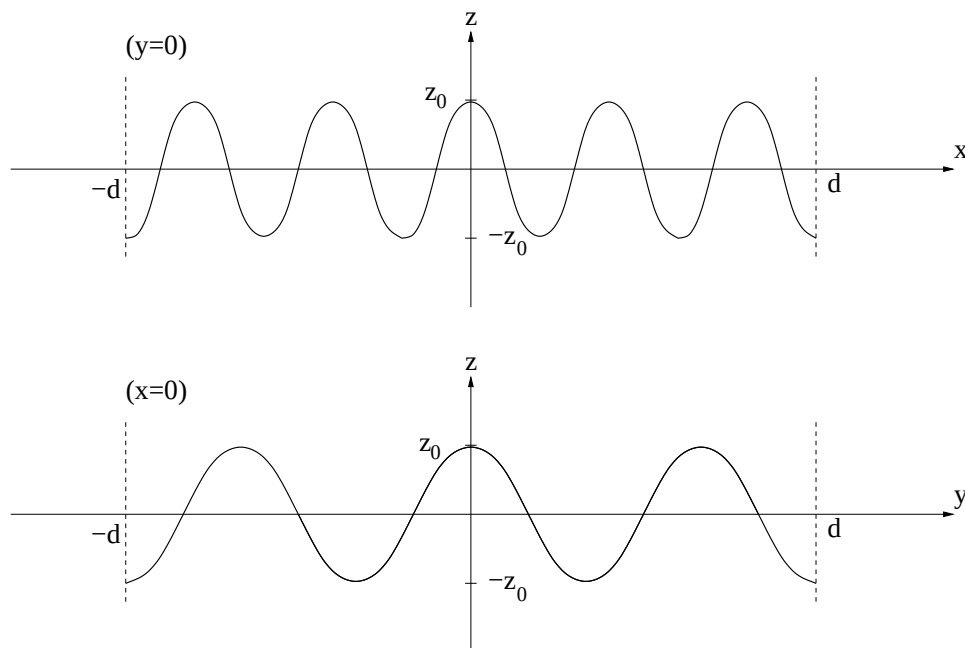
b) En tynn membran (f.eks. papir) er plassert i xy -planet. Et laseroptisk instrument kan måle transversalt utsving på membranen, for $-d < x < d$ når $y = 0$ og for $-d < y < d$ når $x = 0$:



Membranen har stor utstrekning, både i x - og y -retning, i forhold til d . En plan harmonisk transversal bølge ($z =$ utsvinget, $\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$),

$$z(\mathbf{r}, t) = z_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

forplanter seg i membranen, med retning fra område A mot område B (dvs mot høyre og oppover i figuren). Ved tidspunktet $t = 0$ viser instrumentet følgende utsving:



- Anta at $d = 40$ cm. Bestem bølgens bølgelengde λ .
- Bestem bølgens forplantningsretning. Angi denne ved vinkelen θ mellom forplantningsretningen og x -aksen.
- Med et annet instrument er bølgens frekvens målt til $\nu = 108$ Hz. Hva blir bølgens hastighet $\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$? (Bestem både v , v_x og v_y .)

OPPGAVE 2 [teller 15%]

Et toatomig molekyl, som f.eks. HCl, kan (klassisk) betraktes som to masser, M og m , forbundet med ei (masseløs) fjær med fjærkonstant k .

- Vis, med utgangspunkt i Newtons 2. lov, at molekylets atomer kan oscillere omkring sine likevektsposisjoner med vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

der $\mu = mM/(m + M)$ er molekylets såkalte reduserte masse.

Tips: Anta at molekylets massesenter ligger i ro og at atomenes utsving relativt til likevektsposisjonene X_0 og x_0 kan skrives på formen

$$\Xi(t) = X(t) - X_0 = A \cos \omega t$$

og

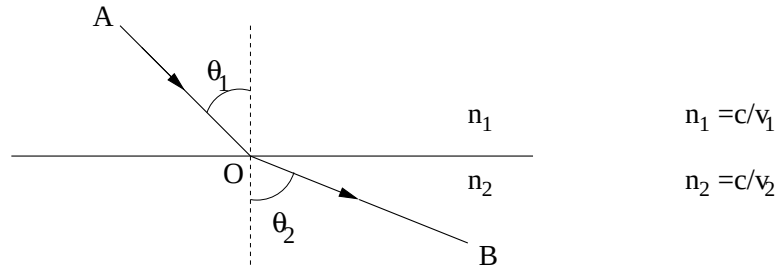
$$\xi(t) = x(t) - x_0 = B \cos \omega t$$

for henholdsvis M og m .

- Hva blir amplitudeforholdet $|A/B|$? (Det er trolig mest naturlig å bestemme $|A/B|$ før du bestemmer vinkelfrekvensen ω .)

OPPGAVE 3 [teller 10%]

Fermats prinsipp sier at en lysstråle velger den veien mellom to punkter A og B som tar kortest tid. Bruk dette prinsippet til å utlede Snells brytningslov, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Ta utgangspunkt i figuren nedenfor, der vi betrakter lysstråler som går fra posisjon A til posisjon B via en posisjon O i grenseflaten mellom de to mediene.

**OPPGAVE 4** [teller 20%]

- Vis at en elektromagnetisk bølge i vakuum, med

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

og

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

forplanter seg i retningen gitt ved $\mathbf{k}$.

- Bruk Maxwells ligninger til å vise at en slik elektromagnetisk bølge er transversal, dvs at $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ og $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$.
- Vis også at $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

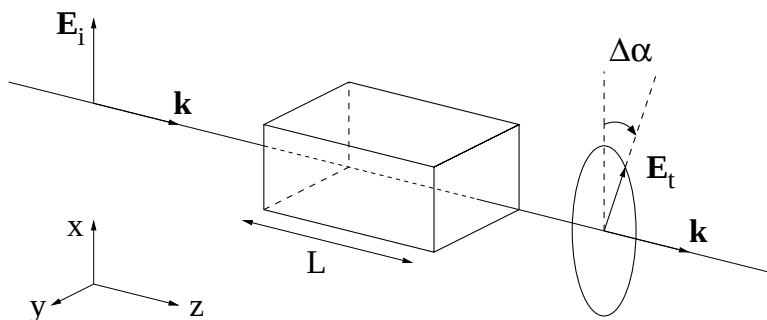
OPPGAVE 5 [teller 25%]

To lineærpolariserte elektromagnetiske bølger kan superponeres og danne sirkulærpolariserte bølger:

$$\mathbf{E}_{\pm}(z, t) = E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) \pm E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t)$$

- Hva er forplantningsretningen til bølgene $\mathbf{E}_+$ og $\mathbf{E}_-$?
- Vis at en lineærpolarisert bølge polarisert i (f.eks.) x -retning kan betraktes som en superposisjon av en "venstredreieende" ($\mathbf{E}_+$) og en "høyredreieende" ($\mathbf{E}_-$) sirkulærpolarisert bølge.

En bestemt type molekyler er såkalt optisk aktive. I en gass bestående av slike molekyler er brytningsindeksene n_+ og n_- for henholdsvis venstre- og høyredreieende sirkulærpolariserte elektromagnetiske bølger forskjellige.



- En beholder med lengde L er fylt med en gass av optisk aktive molekyler, med $\Delta n = n_+ - n_- > 0$. En venstre- og en høyredreieende sirkulærpolarisert elektromagnetisk bølge bruker henholdsvis tiden t_+ og t_- på å propagere gjennom beholderen. Bestem forskjellen i tidsbruk for de to bølgene, $\Delta t = t_+ - t_-$.
- En lineærpolarisert elektromagnetisk bølge $\mathbf{E}_i$ er polarisert i x -retning og sendes inn mot beholderen som ble beskrevet i forrige kulepunkt (bølgetallsvektor $\mathbf{k} = 2\pi\hat{z}/\lambda$). Vis at den transmitterte bølgen $\mathbf{E}_t$ er lineærpolarisert, men at polarisasjonsretningen ikke lenger er langs x -aksen. Finn et uttrykk for vinkelen $\Delta\alpha$ mellom polarisasjonsretningen for innkommende bølge og transmittert bølge. Bestem tallverdi (i radianer) for $\Delta\alpha$ når $L = 0.50$ m, $\lambda = 628$ nm og $\Delta n = 4.0 \cdot 10^{-9}$.

Oppgitt:

$$\begin{aligned}\sin(a - b) + \sin(a + b) &= 2 \sin a \cos b \\ \cos(a - b) - \cos(a + b) &= 2 \sin a \sin b\end{aligned}$$

OPPGAVE 6 [teller 10%]

- Bruk lorentztransformasjonene til å utlede Einsteins formel for addisjon av hastigheter,

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

Her er v_{ij} hastigheten til inertialsystem i målt i inertialsystem j ($i, j = A, B, C$), og vi antar at samtlige relativhastigheter v_{ij} er langs en og samme akse.

- Anta at $v_{AB} = c/2$ og $v_{BC} = c/3$, begge langs positiv x -akse. Hva blir da den prosentvise feilen i v_{AC} dersom vi regner ikke-relativistisk og setter $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$?

Vedlegg: Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x, t)$, midlet over bølgelengde λ :

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda A(x, t) dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x, t)$, midlet over periode T :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, t) dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_B T$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ($Q = \text{varme}$):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ($Q = \text{varme}$):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmetveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

- Dopplereffekt:

$$\nu_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_S}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1 , ρ_1 (for $x < 0$) og E_2 , ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Bølgeligning for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t\end{aligned}$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\bar{S}$ har hastighet $\mathbf{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

$$y = \bar{y}$$

$$z = \bar{z}$$

$$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i S ($\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i $\bar{S}$ ($\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x\hat{x} + \bar{u}_y\hat{y} + \bar{u}_z\hat{z}$):

$$\bar{u}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_y = d\bar{y}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_z = d\bar{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\bar{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Energi:

$$E = \gamma mc^2$$

$$E_0 = mc^2$$

$$E_k = E - E_0$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

- Elastisk prosess: E , $\mathbf{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\mathbf{p}$ bevart.