NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 45 45 55 33

KONTINUASJONSEKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Mandag 15. august 2011 kl. 1500 - 1900

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU.

Side 2 - 5: Oppgavene.
Side 6 - 14: Vedlegg, Formelsamling.

Prøven består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene normalt vil telle under vurderingen. Vektorstørrelser angis med **fete** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren er klar senest 1. september.

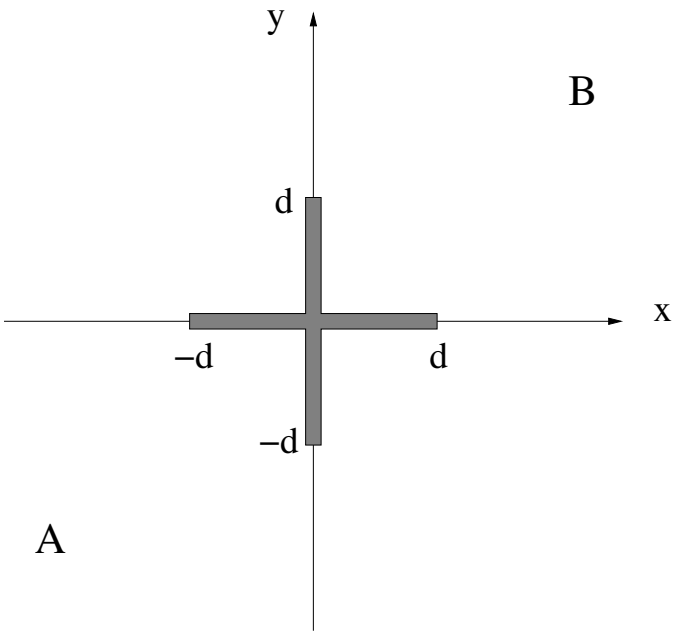
OPPGAVE 1 [1a og 1b teller 10% hver]

a) En metallstreng med lengde $L = 100$ cm er festet i begge ender (dvs knutepunkter der). Grunntonen (dvs laveste resonansfrekvens) og overtonene genereres av stående transversale bølger på strengen. Den skal stemmes slik at grunntonen er en E med frekvens $f = 41$ Hz, tilsvarende en kontrabass. Strengen har sirkulært tverrsnitt med radius $R = 1.00$ mm og er laget av stål, med massetetthet $\rho = 7800$ kg/m^3.

• Bestem bølgelengden λ og bølgehastigheten v til 1. overtone (dvs nest laveste resonansfrekvens). Med hvor stor strekk-kraft S må strengen strammes?

• Du og din venn Arild befinner dere på hver deres vogn som triller bort fra hverandre, med hastighet (relativt til bakken) henholdvis 8 m/s (du) og 12 m/s (Arild). Arild sitter og klimprer på E-strengen på kontrabassen sin. Hvilken frekvens vil grunntonen ha i dine ører? (Lyden fra kontrabassen forplanter seg i luft med hastighet 340 m/s.)

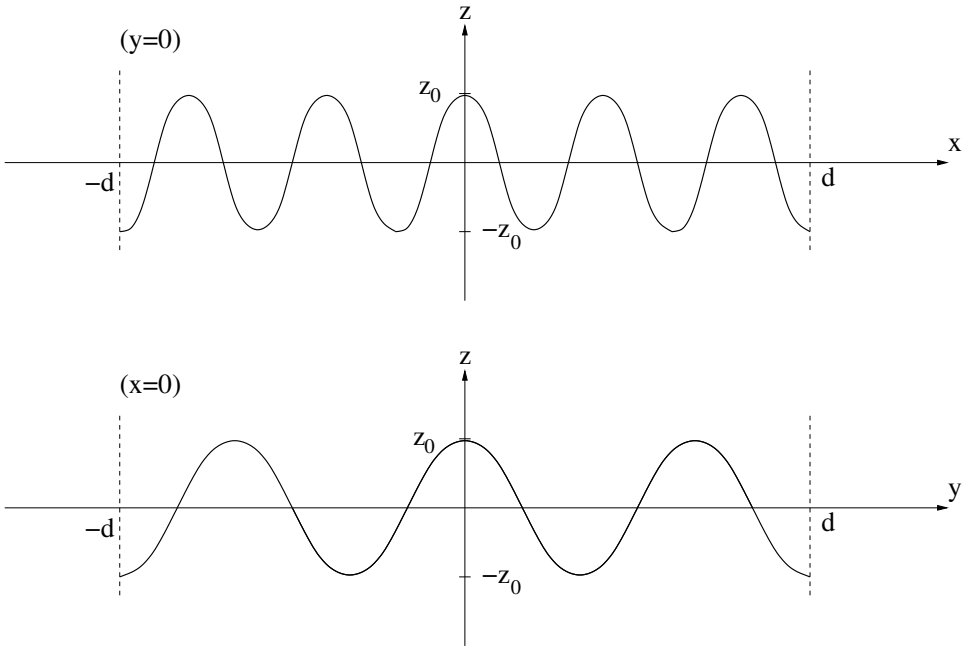
b) En tynn membran (f.eks. papir) er plassert i xy-planet. Et laseroptisk instrument kan måle transversalt utsving på membranen, for $-d < x < d$ når $y = 0$ og for $-d < y < d$ når $x = 0$:



Membranen har stor utstrekning, både i x- og y-retning, i forhold til d. En plan harmonisk transversal bølge (z = utsvinget, $\boldsymbol{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$),

$$z(\boldsymbol{r}, t) = z_0 \cos\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right),$$

forplanter seg i membranen, med retning fra område A mot område B (dvs mot høyre og oppover i figuren). Ved tidspunktet $t = 0$ viser instrumentet følgende utsving:



• Anta at $d = 50$ cm. Bestem bølgens bølgelengde λ.
• Bestem bølgens forplantningsretning. Angi denne ved vinkelen θ mellom forplantningsretningen og x-aksen.
• Med et annet instrument er bølgens frekvens målt til $\nu = 68$ Hz. Hva blir bølgens hastighet $\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$? (Bestem både v, v_x og v_y.)

OPPGAVE 2 [teller 15%]

Et toatomig molekyl, som f.eks. HCl, kan (klassisk) betraktes som to masser, M og m, forbundet med ei (masseløs) fjær med fjærkonstant k.
• Vis, med utgangspunkt i Newtons 2. lov, at molekylets atomer kan oscillere omkring sine likevektsposisjoner med vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

der $\mu = mM/(m+M)$ er molekylets såkalte reduserte masse.
Tips: Anta at molekylets massesenter ligger i ro og at atomenes utsving relativt til likevektsposisjonene X_0 og x_0 kan skrives på formen

$$\Xi(t) = X(t) - X_0 = A\cos\omega t$$

og

$$\xi(t) = x(t) - x_0 = B\cos\omega t$$

for henholdsvis M og m.

• Hva blir amplitudeforholdet $|A/B|$? (Det er trolig mest naturlig å bestemme $|A/B|$ *før* du bestemmer vinkelfrekvensen ω.)

OPPGAVE 3 [teller 15%]
Vis at

$$\xi(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}}\sin(kr - \omega t)$$

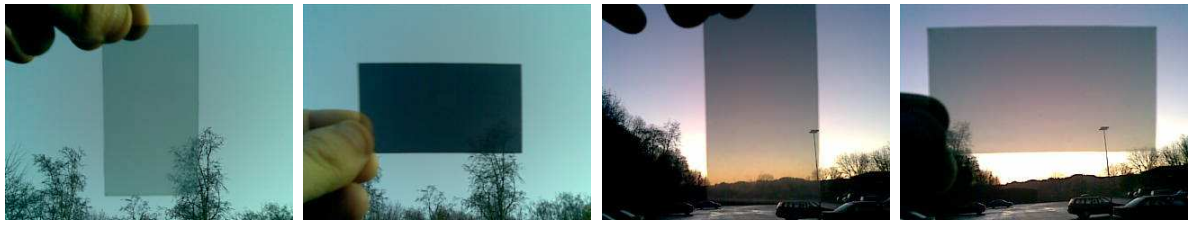
tilnærmet oppfyller bølgeligningen for sylindersymmetriske bølger,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r}\right),$$

i stor avstand r fra den sylindersymmetriske bølgekilden. Hva betyr "stor avstand" i denne sammenhengen? Bruk bølgelengden λ som "målestokk".

OPPGAVE 4 [teller 15%]

Bildene nedenfor er tatt like etter solnedgang fredag 24. oktober 2008, på parkeringsplassen P-35 sør for Gløshaugen, i ulike retninger, og gjennom et polarisasjonsfilter orientert henholdsvis vertikalt og horisontalt, dvs slik at lys med $\boldsymbol{E}$ polarisert henholdsvis vertikalt og horisontalt i forhold til synslinjen slipper gjennom.



De to bildene lengst til venstre er tatt sørover, dvs mer eller mindre normalt på sollysets forplantningsretning. De to bildene lengst til høyre er tatt vestover, dvs rett mot solnedgangen.

Forklar det du ser! Mer spesifikt: Forklar hvorfor himmelen er blålig mot sør mens den er rødlig mot vest. Forklar også hvorfor så lite lys slipper gjennom polarisasjonsfilteret i bilde nummer to fra venstre.

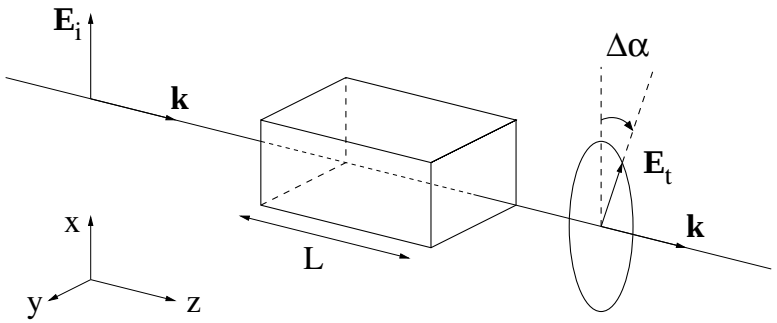
OPPGAVE 5 [teller 25%]

To lineærpolariserte elektromagnetiske bølger kan superponeres og danne sirkulærpolariserte bølger:

$$\boldsymbol{E}_{\pm}(z,t) = E_0\hat{x}\sin(kz - \omega t) \pm E_0\hat{y}\cos(kz - \omega t)$$

• Hva er forplantningsretningen til bølgene $\boldsymbol{E}_+$ og $\boldsymbol{E}_-$?
• Vis at en lineærpolarisert bølge polarisert i (f.eks.) x-retning kan betraktes som en superposisjon av en "venstredreiende" ($\boldsymbol{E}_+$) og en "høyredreiende" ($\boldsymbol{E}_-$) sirkulærpolarisert bølge.

En bestemt type molekyler er såkalt optisk aktive. I en gass bestående av slike molekyler er brytningsindeksene n_+ og n_- for henholdsvis venstre- og høyredreiende sirkulærpolariserte elektromagnetiske bølger forskjellige.



• En beholder med lengde L er fylt med en gass av optisk aktive molekyler, med $\Delta n = n_+ - n_- > 0$. En venstre- og en høyredreiende sirkulærpolarisert elektromagnetisk bølge bruker henholdsvis tiden t_+ og t_- på å propagere gjennom beholderen. Bestem forskjellen i tidsbruk for de to bølgene, $\Delta t = t_+ - t_-$.

• En lineærpolarisert elektromagnetisk bølge $\boldsymbol{E}_i$ er polarisert i x-retning og sendes inn mot beholderen som ble beskrevet i forrige kulepunkt (bølgetallsvektor $\boldsymbol{k} = 2\pi\hat{z}/\lambda$). Vis at den transmitterte bølgen $\boldsymbol{E}_t$ er lineærpolarisert, men at polarisasjonsretningen ikke lenger er langs x-aksen. Finn et uttrykk for vinkelen $\Delta\alpha$ mellom polarisasjonsretningen for innkommende bølge og transmittert bølge. Bestem tallverdi (i radianer) for $\Delta\alpha$ når $L = 0.50$ m, $\lambda = 628$ nm og $\Delta n = 4.0 \cdot 10^{-9}$.

Oppgitt:

$$\begin{aligned} \sin(a-b) + \sin(a+b) &= 2\sin a \cos b \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2\sin a \sin b \end{aligned}$$

OPPGAVE 6 [teller 10%]

• Bruk lorentztransformasjonene til å utlede Einsteins formel for addisjon av hastigheter,

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

Her er v_{ij} hastigheten til inertialsystem i målt i inertialsystem j $(i, j = A, B, C)$, og vi antar at samtlige relativhastigheter v_{ij} er langs en og samme akse.

• Anta at $v_{AB} = c/2$ og $v_{BC} = c/3$, begge langs positiv x-akse. Hva blir da den prosentvise feilen i v_{AC} dersom vi regner ikke-relativistisk og setter $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$?

Vedlegg: Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\xi(\boldsymbol{r},t)\left(\equiv \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

  Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

  med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\,\nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned} \Delta D_\perp &= 0 \\ \Delta E_\parallel &= 0 \\ \Delta B_\perp &= 0 \\ \Delta H_\parallel &= 0 \end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\left(x - vt\right) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left(\overline{x} + v\overline{t}\right) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.