

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Mandag 15. august 2011 kl. 1500 - 1900

Eksamen bestod av 6 oppgaver. Løsningsforslaget er på 7 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a)

- 1. overtones bølgelengde: $\lambda = L = 1.00$ m. Bølgehastigheten: $v = \lambda f = 1.00 \cdot 82$ m/s = 82 m/s. Vi har fra formelarket at $v = \sqrt{S/\mu}$, der μ er strengens masse pr lengdeenhet. For denne strengen:

$$\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi R^2 = 7800 \cdot \pi \cdot 0.001^2 = 2.45 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}$$

Dermed blir strekk-krafta

$$S = \mu v^2 = 165 \text{ N}$$

•

$$f_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S = \frac{1 - 8/340}{1 - (-12)/340} \cdot 41 = 38.7 \text{ Hz}$$

b)

- Bølgetallsvektoren er $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$. Med $t = 0$ og $y = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_x x$. Fra figuren ser vi at $k_x \cdot (2d/5) = 2\pi$, dvs $k_x = 5\pi/d$. Med $t = 0$ og $x = 0$ er utsvinget beskrevet ved funksjonen $z_0 \cos k_y y$. Fra figuren ser vi at $k_y \cdot (2d/3) = 2\pi$, dvs $k_y = 3\pi/d$. Dermed er

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\pi}{d} \sqrt{5^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{34}\pi}{d}$$

slik at bølgelengden blir

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2d}{\sqrt{34}} \simeq 17.1 \text{ cm}$$

- Bølgens forplantningsretning er sammenfallende med $\mathbf{k}$. Dermed:

$$\tan \theta = \frac{k_y}{k_x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta \simeq 31^\circ$$

- Vi har $v = \lambda \nu = 17.1 \text{ cm} \cdot 68 \text{ s}^{-1} = 11.7 \text{ m/s}$. Med forplantning i retning $\theta = 31^\circ$ i forhold til x -aksen har vi da $v_x = v \cos \theta \simeq 10.0 \text{ m/s}$ og $v_y = v \sin \theta \simeq 6.0 \text{ m/s}$.

OPPGAVE 2

La oss anta at molekylet ligger langs x -aksen, med massen m til høyre for massen M , slik at $x > X$. Fjærkraften er $k((x - X) - (x_0 - X_0))$, der uttrykket i parentes er strekket i eller sammenpressingen av fjæra. Hvis fjæra er strukket, dvs $x - X > x_0 - X_0$, virker det en positiv kraft på M og en negativ kraft på m . Hvis fjæra er sammenpresset, blir det omvendt. Newtons 2. lov gir dermed:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= k(x - X - x_0 + X_0) \\ m\ddot{x} &= -k(x - X - x_0 + X_0) \end{aligned}$$

Vi følger tipset i oppgaveteksten og innfører $\Xi = X - X_0$ og $\xi = x - x_0$. Dermed:

$$\begin{aligned} M\ddot{\Xi} &= k\xi - k\Xi \\ m\ddot{\xi} &= -k\xi + k\Xi \end{aligned}$$

Innsetting av $\Xi = A \cos \omega t$ og $\xi = B \cos \omega t$ gir

$$\begin{aligned} -M\omega^2 A &= kB - kA \\ -m\omega^2 B &= -kB + kA \end{aligned}$$

Addisjon av disse to ligningene gir

$$-\omega^2(MA + mB) = 0$$

dvs

$$A/B = -m/M$$

som besvarer siste del av oppgaven. Innsetting av $B = -AM/m$ i (f.eks.) den siste av de to ligningene ovenfor gir

$$M\omega^2 A = kAM/m + kA$$

dvs

$$\omega^2 = k \frac{M/m + 1}{M} = k \frac{M + m}{mM} = k/\mu$$

som besvarer første del av oppgaven.

OPPGAVE 3

Vi regner ut de nødvendige deriverte av ξ , setter inn i bølgeligningen og ser hva vi får:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{k \cos(kr - \omega t)}{r^{1/2}} - \frac{\sin(kr - \omega t)}{2r^{3/2}} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} &= -\frac{k^2 \sin(kr - \omega t)}{r^{1/2}} - \frac{k \cos(kr - \omega t)}{r^{3/2}} + \frac{3 \sin(kr - \omega t)}{4r^{5/2}} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2 \sin(kr - \omega t)}{r^{1/2}} \end{aligned}$$

Med $v^2 = \omega^2/k^2$ gir innsetting i den gitte bølgeligningen

$$-\frac{\omega^2 \sin(kr - \omega t)}{r^{1/2}} = -\frac{\omega^2 \sin(kr - \omega t)}{r^{1/2}} + \frac{\omega^2 \sin(kr - \omega t)}{4k^2 r^{5/2}}$$

Da innser vi at den gitte $\xi(r, t)$ ikke er en eksakt løsning av bølgeligningen, pga ledd nummer to på høyre side. Vi innser også at den gitte $\xi(r, t)$ vil være en god tilnærmet løsning dersom ledd nummer to på høyre side er lite i forhold til de to øvrige, med andre ord dersom

$$4k^2 r^2 \gg 1$$

dvs

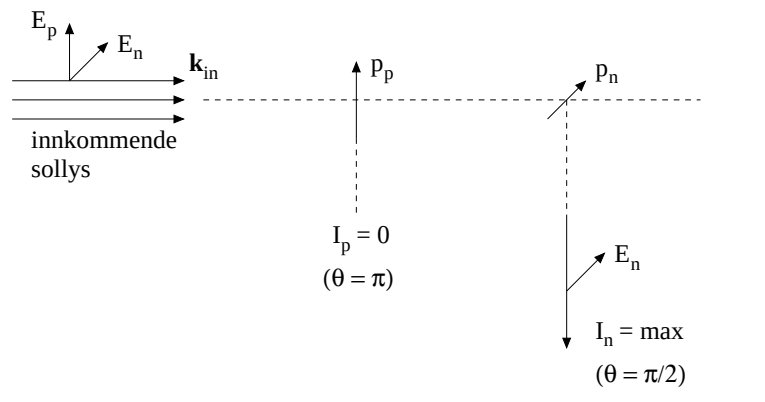
$$r \gg \frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

dvs for avstander fra cylinderbølgens sentrum som er store i forhold til bølgelengden.

OPPGAVE 4

Farge: Atmosfæren sprer høyfrekvent (blått) lys mye mer effektivt enn lavfrekvent (rødt) lys, $I \sim f^4$. Når vi her ser mot sør, ser vi spredt lys, som da blir blålig. Ser vi mot solnedgangen, ser vi lys som ikke har blitt spredt av atmosfæren. Siden det blå lyset er spredt i større grad enn det røde, vil lyset fra solnedgangen bli rødlig.

Polarisering: Det innkommende sollyset er ikke polarisert men består av bølger med elektrisk feltvektor $\mathbf{E}$ i alle mulige retninger, dog normalt på forplantningsretningen, siden elektromagnetiske bølger alltid er transversale. En bølge med en gitt polarisasjonsretning kan dekomponeres i en komponent parallelt med synslinjen (E_p) og en komponent normalt på synslinjen (E_n):



Komponenten E_p vil indusere oscillerende dipoler p_p i atmosfæren. Disse sender igjen ut elektromagnetisk stråling med retningsavhengig intensitet $I(\theta) \sim \sin^2 \theta$, der $\theta = \pi$, og dermed $I = 0$, tilsvarende nedover mot bakken. Komponentene E_n vil indusere oscillerende dipoler p_n . Utsendt stråling fra disse dipolene blir maksimal i planet normalt på dipolen ($\theta = \pi/2$), dvs inklusive retningen nedover mot bakken.

Vi ser tydelig at lyset fra sørhimmelen er polarisert, med $\mathbf{E}$ vertikalt, dvs normalt på synslinjen (og, selvsagt, normalt på sollysets forplantningsretning). Dette stemmer bra med diskusjonen ovenfor: Synslinjen tilsvarende en retning som samsvarer med $\theta = \pi/2$ for elektriske dipoler som oscillerer vertikalt, og som sender bølger mot oss med $\mathbf{E}$ pekende vertikalt. For oscillerende dipoler på vesthimmelen vil synslinjen tilsvarende $\theta \simeq \pi/2$ uansett polarisasjonsretning. Dette lyset er derfor ikke polarisert.

OPPGAVE 5

- Disse bølgene forplanter seg i positiv z -retning.

- Her er det bare å legge sammen $\mathbf{E}_+$ og $\mathbf{E}_-$ og se hva en får:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) + E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \\ &+ E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) - E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \\ &= 2E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t)\end{aligned}$$

som jo nettopp er en lineærpolarisert bølge polarisert i x -retning.

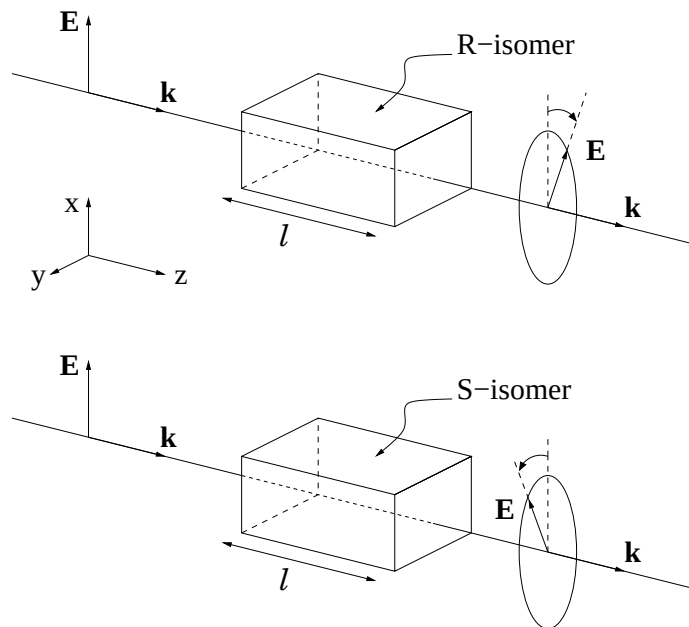
- Gjennom et medium med brytningsindeks n forplanter en elektromagnetisk bølge seg med hastighet $v = c/n$. Dermed:

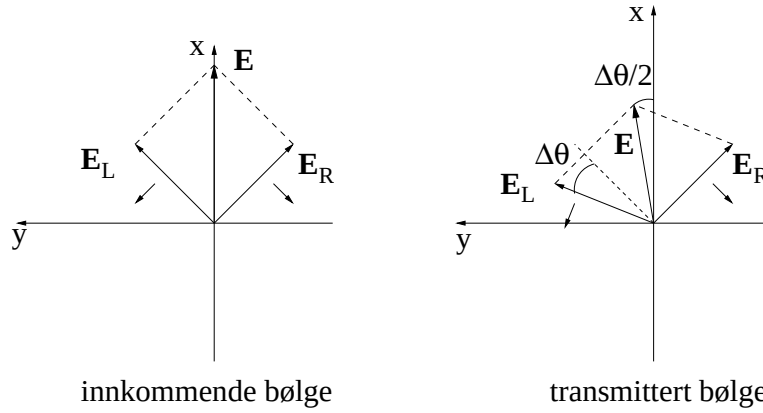
$$\Delta t = t_+ - t_- = L/v_+ - L/v_- = \frac{L}{c} (n_+ - n_-) = \frac{L\Delta n}{c}$$

- Tidsforskjellen Δt tilsvarer en opparbeidet faseforskjell $\Delta\theta$ mellom de to sirkulærpolariserte delbølgene, gitt ved

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = ck\Delta t = c\frac{2\pi}{\lambda}\Delta t = \frac{2\pi L\Delta n}{\lambda}$$

Den transmitterte bølgen er følgelig fremdeles en lineærpolarisert bølge, der polarisasjonsretningen ikke lenger er langs x , men rotert en vinkel $\Delta\theta/2$ i forhold til x -aksen (som vi skal se nedenfor).





Vi skal nå se at dersom $\mathbf{E}_+$ og $\mathbf{E}_-$ har opparbeidet en innbyrdes faseforskjell $\Delta\theta$ ved transmisjon gjennom mediet, så har polarisasjonsplanet til $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ rotert en vinkel $\Delta\theta/2$. Vi bruker trigonometriske relasjoner for summer av sinuser og cosinuser:

$$\begin{aligned}\sin(a - b) + \sin(a + b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b + \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ &= 2 \sin a \cos b \\ \cos(a - b) - \cos(a + b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &= 2 \sin a \sin b\end{aligned}$$

Her har vi, for den transmitterte bølgen $\mathbf{E}_t$, med $\beta \equiv kz - \omega t - \Delta\theta/2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t - \Delta\theta) + E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t - \Delta\theta) \\ &+ E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) - E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \\ &= E_0 \hat{x} \sin(\beta - \Delta\theta/2) + E_0 \hat{y} \cos(\beta - \Delta\theta/2) \\ &+ E_0 \hat{x} \sin(\beta + \Delta\theta/2) - E_0 \hat{y} \cos(\beta + \Delta\theta/2) \\ &= 2E_0 \hat{x} \sin \beta \cos(\Delta\theta/2) + 2E_0 \hat{y} \sin \beta \sin(\Delta\theta/2) \\ &= 2E_0 \sin(kz - \omega t - \Delta\theta/2) (\hat{x} \cos(\Delta\theta/2) + \hat{y} \sin(\Delta\theta/2))\end{aligned}$$

Dette er en lineærpolarisert bølge der polarisasjonsretningen danner en vinkel

$$\Delta\alpha = \Delta\theta/2 = \frac{\pi L \Delta n}{\lambda}$$

med x -aksen.

Tallverdi:

$$\Delta\alpha = \frac{\pi \cdot 0.50 \cdot 4.0 \cdot 10^{-9}}{628 \cdot 10^{-9}} = 0.01$$

dvs radianer.

OPPGAVE 6

• Her kjenner vi altså $v_{AB} = u$ og $v_{BC} = v$, og vi søker et uttrykk for $v_{AC} = w$. Vi lar system C tilsvare system S , dvs umerkede symboler for tid og posisjon, mens vi lar system B tilsvare system S' , dvs merkede symboler for tid og posisjon. Da har vi $w = dx/dt$ og $u = dx'/dt'$, mens lorentztransformasjonene for rom og tid knytter disse sammen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx/c^2)} \\ &= \frac{dx/dt - v}{1 - v(dx/dt)/c^2} \\ &= \frac{u - v}{1 - vw/c^2} \end{aligned}$$

Denne kan vi løse med hensyn på w :

$$w = v_{AC} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

• Med Einstein:

$$v_{AC} = \frac{c/2 + c/3}{1 + 1/6} = 5c/7$$

Med Galileo:

$$v_{AC} = c/2 + c/3 = 5c/6$$

som representerer en feil på

$$\frac{5c/6 - 5c/7}{5c/7} = 7/6 - 1 = 1/6 \simeq 17\%$$