Institutt for fysikk, NTNU
FY1002/TFY4160 Bølgefysikk
Høst 2010

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Løsningsforslag til Midtsemesterprøve fredag 15. oktober 2010 kl 08.15 – 09.45

Fasit på side 10.

Oppgavene og et kortfattet løsningsforslag:

---

1) Vi betrakter en transversal harmonisk bølge på en streng, med amplitude 1 mm, bølgelengde 40 cm og frekvens (f) 100 Hz. Hva er fasehastigheten til en slik bølge?

A 40 m/s
B 40 cm/s
C 1 mm/s
D 63 cm/s

$v = \lambda/T = \lambda f = 0.40 \cdot 100$ m/s $= 40$ m/s

A

---

2) For den svingende strengen i oppgave 1, hva blir maksimal (transversal) hastighet for et strengelement?

A 40 m/s
B 40 cm/s
C 1 mm/s
D 63 cm/s

$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \dot{y} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$
$\Rightarrow \dot{y}_{\max} = \omega y_0 = 2\pi \cdot 100 \cdot 0.001$ m/s $\simeq 0.63$ m/s

D

---

3) På en streng med lengde 2 m og masse 25 g forplanter transversale bølger seg med hastighet 100 m/s. Hva stor er strekk-kraften i strengen?

A 50 N
B 75 N
C 100 N
D 125 N

$S = \mu v^2 = (0.025/2) \cdot 100^2 = 125$ N

D

---

4) Strengen i oppgave 3 er festet i begge ender. Hvilken frekvens har grunntonen?

A 10 Hz
B 25 Hz
C 75 Hz
D 125 Hz

$\lambda_1 = 2L = 4$ m $\Rightarrow f_1 = v/\lambda_1 = 100/4 = 25$ Hz

B

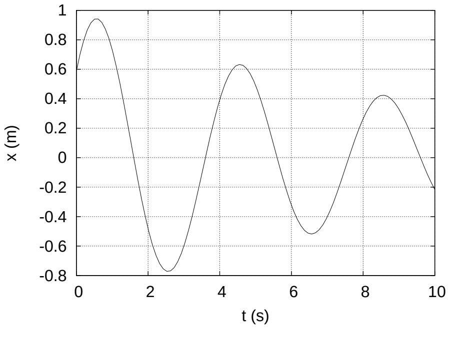
---

5) En kloss med masse m ligger på et bord og er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k. Friksjonskoeffisientene mellom kloss og bord er μ_s (statisk) og μ_k (kinetisk). Klossen trekkes en avstand A ut fra likevekt (slik at fjæra strekkes) og slippes med null starthastighet. Hvilke(t) krav må vi stille til A for at klossen skal begynne å svinge fram og tilbake?

A Vi må ha $A > \mu_s mg/k$.
B Vi må ha $A < \mu_s mg/k$.
C Vi må ha $A > gk/\mu_s m$.
D Ingen.

Fjærkraften kA må overstige maksimal friksjonskraft $\mu_s mg$. Altså: $A > \mu_s mg/k$.

A



6) Figuren ovenfor viser en dempet svingning der utsvinget er gitt som

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi).$$

Hva er initialverdiene $x(0)$ og $\dot{x}(0)$ for dette svingeforløpet?

A $x(0) \simeq 60$ cm, $\dot{x}(0) \simeq -120$ cm/s
B $x(0) \simeq -60$ cm, $\dot{x}(0) \simeq 120$ cm/s
C $x(0) \simeq 60$ cm, $\dot{x}(0) \simeq 120$ cm/s
D $x(0) \simeq -60$ cm, $\dot{x}(0) \simeq -120$ cm/s

Vi ser direkte fra grafen at $x(0) \simeq 60$ cm og at $\dot{x}(0) > 0$ (positiv helning på kurven i $t = 0$).

C

---

7) Anslå den karakteristiske dempingstiden τ i uttrykket for $x(t)$ i oppgave 6 (med utgangspunkt i figuren ovenfor).

A $\tau \simeq 4$ s
B $\tau \simeq 7$ s
C $\tau \simeq 10$ s
D $\tau \simeq 13$ s

Fra grafen ser vi at $T \simeq 4$ s. Første topp-punkt er $x_1 \simeq 0.95$ m og tredje topp-punkt er $x_3 \simeq 0.42$ m. Dermed:

$$\frac{x_3}{x_1} \simeq \frac{0.42}{0.95} = e^{-2T/\tau}$$

som gir

$$\tau \simeq \frac{2T}{\ln(0.95/0.42)} \simeq 9.8\,\mathrm{s} \simeq 10\,\mathrm{s}$$

C

---

8) Vi betrakter fri svingninger i en enkel udempet endimensjonal harmonisk oscillator, mer presist en masse m festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k. Hvilken av påstandene nedenfor er da *feil*?

A Den totale mekaniske energien endrer seg ikke med tida.
B Den kinetiske energien oscillerer med periode $2\pi\sqrt{m/k}$.
C En dobling av massen reduserer svingefrekvensen med i underkant av tredve prosent.
D Massens utsving fra likevekt og dens akselerasjon er i motfase.

Påstand B er feil. Hvis x, og dermed $\dot{x}$, en harmonisk funksjon med vinkelfrekvens ω, vil kinetisk energi E_k, som er proporsjonal med $\dot{x}^2$, bli en harmonisk funksjon med vinkelfrekvens 2ω. (Eks: $\sin^2(\omega t) = (1 - \cos 2\omega t)/2$) E_k oscillerer dermed med perioden $2\pi/2\omega = \pi\sqrt{m/k}$.

B

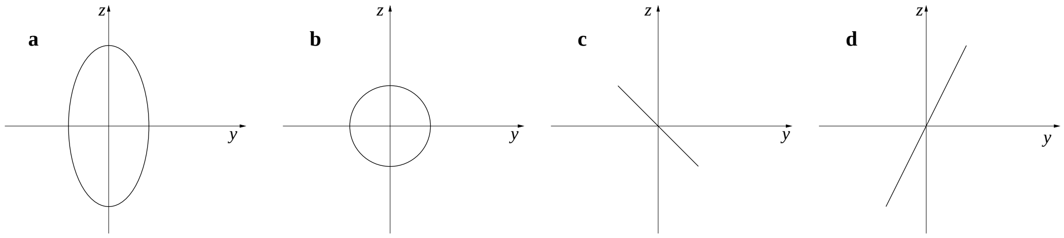
---

9) En masse m er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k. En dempemekanisme gir en dempingskraft $-b\dot{x}$, dvs proporsjonal med massens hastighet $\dot{x}$. Massen påvirkes av en ytre harmonisk kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$ slik at utsvinget fra likevekt blir $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi)$, med frekvensavhengig amplitude $A(\omega)$ og fasekonstant $\phi(\omega) = \arctan[(\omega_0^2 - \omega^2)m/\omega b]$. (Her er $\omega_0^2 = k/m$.) Hvilken av påstandene nedenfor om resonans er da *feil*?

A Når frekvensen til F tilsvarer systemets resonansfrekvens, er F og $\dot{x}$ i fase.
B Midlere tilført effekt er proporsjonal med F_0^2.
C Med svak demping er F og x i fase dersom ω er betydelig mindre enn ω_0.
D Med svak demping er resonanskurvens halvverdibredde proporsjonal med b^{-1}.

Påstand D er feil. Svak demping gir smal resonanskurve, og da kan ikke bredden være proporsjonal med $1/b$. Bredden er derimot proporsjonal med b.

D



10) Figuren over viser fire kurver som spissen av $\boldsymbol{D}(x,t)$ vil tegne ved $x = 0$ for følgende fire harmoniske bølger:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(x,t) &= D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi)\hat{z} && (1)\\
\boldsymbol{D}(x,t) &= D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z} && (2)\\
\boldsymbol{D}(x,t) &= D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z} && (3)\\
\boldsymbol{D}(x,t) &= D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{z} && (4)
\end{aligned}$$

Hvilke figurer hører sammen med hvilke $\boldsymbol{D}(0,t)$?

A (a og 3), (b og 4), (c og 1), (d og 2)
B (a og 4), (b og 1), (c og 3), (d og 2)
C (a og 2), (b og 3), (c og 1), (d og 4)
D (a og 1), (b og 2), (c og 3), (d og 4)

Vi har ved $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(0,t) &= -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + D_0 \sin(\omega t)\hat{z} && (5)\\
\boldsymbol{D}(0,t) &= -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(\omega t)\hat{z} && (6)\\
\boldsymbol{D}(0,t) &= -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + D_0 \cos(\omega t)\hat{z} && (7)\\
\boldsymbol{D}(0,t) &= -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} - 2D_0 \sin(\omega t)\hat{z} && (8)
\end{aligned}$$

Dermed blir alternativ C riktig.

C

11) Ved adiabatiske forhold har vi pV^γ = konstant. Her er p trykket, V er volumet, mens γ er adiabatkonstanten. Hva blir sammenhengen mellom trykk og temperatur ved adiabatiske forhold? (Anta ideell gass.)

A $p^{\gamma-1}\,T^{-\gamma}$ = konstant
B $p\,T$ = konstant
C $p^\gamma\,T$ = konstant
D $p\,T^{\gamma-1}$ = konstant

$$pV^\gamma = p\left(\frac{Nk_BT}{p}\right)^\gamma \sim p^{1-\gamma}T^\gamma \sim p^{\gamma-1}T^{-\gamma}$$

Ettersom vi startet med noe som er konstant, kan vi f.eks opphøye denne i en eller annen konstant, inklusive minus en, noe som gir den siste sammenhengen.

A

---

12) Kravet om energibevarelse medfører at amplituden til trykkvariasjonsbølgen for en kulebølge avtar med avstanden r fra symmetrisenteret som $(\Delta p)_0(r) \sim r^{-n}$ med

A $n = 1/2$
B $n = -1/2$
C $n = 1$
D $n = -1$

Like mye effekt må passere gjennom alle kuleskall med ulik radius r. Dermed:

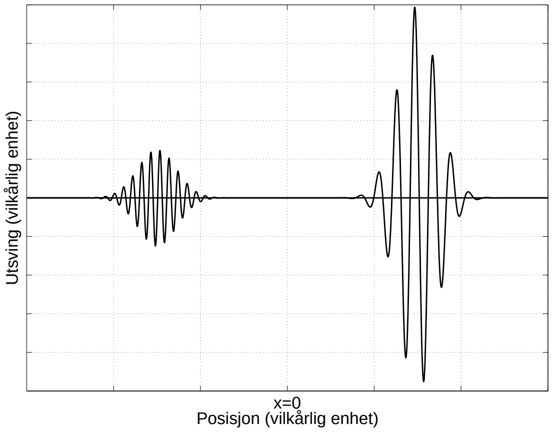
$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

som gir at intensiteten avhenger av r som

$$I(r) \sim 1/r^2$$

Vi har at $I \sim \xi^2$, men siden $\Delta p \sim \partial\xi/\partial x$, må vi også ha $I \sim (\Delta p)^2$. Dermed: $(\Delta p)_0 \sim 1/r$ og $n = 1$.

C



13) En bølgepakke på en streng kom inn fra venstre og ble delvis reflektert og delvis transmittert i en skjøt litt til venstre for $x = 0$. Figuren over viser den reflekterte og den transmitterte bølgepakken. Omtrent hvor stor andel av den innkommende bølgepakkens energi ble reflektert?

A Ca 6 %
B Ca 11 %
C Ca 16 %
D Ca 21 %

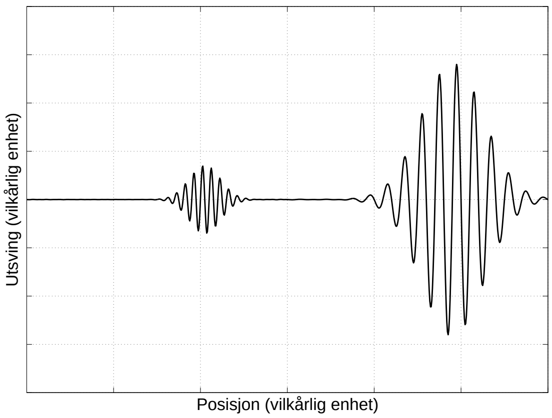
$$y_{r0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} y_{i0}$$

der reflektert bølge er i område 1 og transmittert bølge i område 2. Fra grafen ser vi at $\lambda_2 \simeq 2\lambda_1$ som gir

$$R = |y_{r0}/y_{i0}|^2 \simeq 0.11$$

B

Dessverre var figuren i oppgaveteksten misvisende og forvirrende, i og med at den transmitterte bølgepakken bare hadde omlag halvparten så mange bølgetopper som den reflekterte. Dette er ufysikalsk. Et riktigere bilde vil se omtrent slik ut:



Av den grunn fikk alle registrert riktig svar på denne oppgaven.

14) Et tynt, luftfylt rør er lukket i den ene og åpent i den andre enden. Røret er 3 m langt. Anslå frekvensen til grunntonen i røret en kald vinterdag på Røros. Du kan anta at luft består av 4/5 nitrogen (N_2) og 1/5 oksygen (O_2), med molekylmasser henholdsvis 28 og 32 ganger protonmassen.

A 26 Hz
B 39 Hz
C 64 Hz
D 113 Hz

Grunntonen: $\lambda = 4L = 12$ m. Midlere molekylmasse: $m = (0.8 \cdot 28 + 0.2 \cdot 32) \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg $= 4.8 \cdot 10^{-26}$ kg. Lydhastigheten: $v = \sqrt{\gamma k_B T/m} \simeq \sqrt{1.4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 243/4.8 \cdot 10^{-26}} \simeq 312$ m/s. På en kald vinterdag er det gjerne -30 °C på Røros. Frekvensen blir dermed $f \simeq 312/12 \simeq 26$ Hz.

A

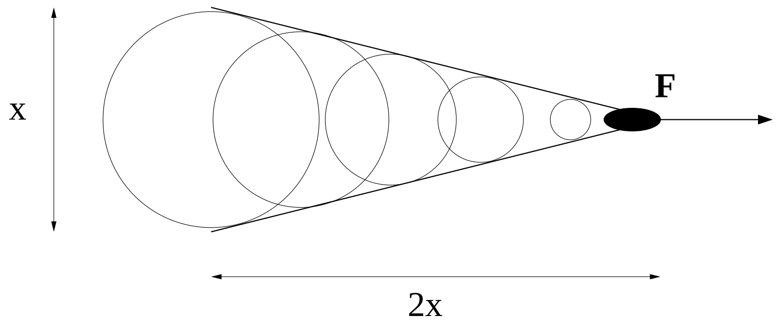
---

15) En ambulansesirene genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 850 Hz. En sterk vind blåser i retning fra ambulansen og mot deg, med vindhastighet 25 m/s. Både du og ambulansen står stille. Hvilken frekvens hører du? (Lydhastigheten er 340 m/s.)

A 783 Hz
B 850 Hz
C 917 Hz
D 985 Hz

Så lenge $v_O = v_S = 0$, spiller det ingen rolle om det blåser. Observatøren vil måle samme frekvens som kilden (S) sender ut.

B



16) I figuren over angir sirklene (kule-)bølgefronter generert ved at flyet (F) komprimerer lufta i forkant. Bruk figuren til å bestemme flyets hastighet, målt i enheter av lydhastigheten.

A 1.3
B 2.0
C 2.9
D 4.1

$\tan\alpha = (x/2)/2x = 0.25$, dvs $\alpha \simeq 14$ grader. Dermed: $v_F/v = 1/\sin\alpha = 4.1$.

D

---

17) En bølgepakke ute på havet har (hovedsaklig) bølgelengde 20 m. Bølgepakken beveger seg rett mot kysten som ligger 5 km unna. Hvor lang tid tar det før bølgepakken når land? Du kan anta at vi hele tiden er på dypt vann. Dispersjonsrelasjonen for dypvannsbølger er $\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$, med $g = 9.8$ m/s^2, $\gamma = 0.073$ J/m^2 og $\rho = 1000$ kg/m^3.

A ca et kvarter
B ca en halvtime
C ca to timer
D ca fire timer

For så lange bølgelengder har vi $\omega(k) = \sqrt{gk}$ og dermed $v_g = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi}$. Bølgepakken bruker dermed tiden $t = L/v_g = 5000/2.79 = 1790$ sekunder, dvs ca en halv time, inn til land.

B

---

18) Strengt tatt er transversale bølger på en streng *ikke helt* dispersjonsfrie. Anta at vi har en uniform metallstreng med sirkulært tverrsnitt A, massetetthet ρ og elastisk modul (Youngs modul) Y. Dispersjonsrelasjonen er da gitt som

$$\omega = \sqrt{\frac{S}{\mu}k^2 + \frac{YA^2}{4\pi\mu}k^4}$$

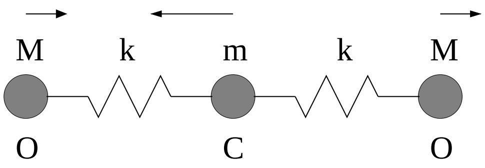
der S er strekket i strengen og $\mu = \rho A$ er strengens masse pr lengdeenhet. For korte bølgelengder blir dermed fasehastigheten v og gruppehastigheten v_g ikke nøyaktig like store. Hvilken av dem er størst?

A Det kommer an på hva bølgelengden er.
B Det kan ikke avgjøres ut fra den oppgitte dispersjonsrelasjonen.
C Fasehastigheten.
D Gruppehastigheten.

Her kan vi skrive $\omega^2 = ak^2 + bk^4$ med positive konstanter a og b. Gruppe- og fasehastigheten blir dermed hhv

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega}\frac{d\omega^2}{dk} = \frac{1}{2\omega}\left(2ak + 4bk^3\right) \\ v &= \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2\omega}\frac{2\omega^2}{k} = \frac{1}{2\omega}\left(2ak + 2bk^3\right) < v_g \end{aligned}$$

D



19) Karbondioksyd, CO_2, er et lineært molekyl, som vist i figuren over. Vi antar at kreftene mellom karbon og oksygen kan beskrives ved hjelp av ideelle fjærer med fjærkonstant k. Atomene kan svinge harmonisk omkring sine likevektsposisjoner i fire såkalte "normale moder". En av disse normale modene er antydet i figuren. Her svinger oksygenatomene (masse M) i samme retning (med lik amplitude), mens karbonatomet (masse m) svinger motsatt vei. Molekylets massemiddelpunkt ligger hele tiden i ro. Hva er vinkelfrekvensen ω til denne vibrasjonsbevegelsen?

A $\sqrt{k(m-2M)/mM}$ B $\sqrt{k(m+2M)/mM}$ C $\sqrt{k/(2M+m)}$ D $\sqrt{k/(2M-m)}$

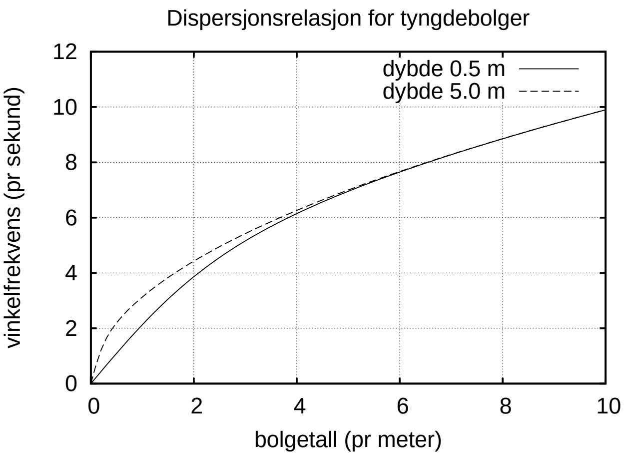
Massesenteret i ro betyr at $mx_C + 2Mx_O = 0$, dvs $x_C = -(2M/m)x_O$. Her er x_C og x_O utsvingene til hhv C og O fra likevekt. Netto kraft på O, f.eks den til venstre: $-kx_O + kx_C = -kx_O(1+2M/m)$ Newtons andre lov gir dermed $\ddot{x}_O + \omega^2 x_O = 0$ med $\omega^2 = k(m+2M)/mM$

B

---

20) Figuren til høyre viser dispersjonsrelasjonen $\omega(k) = \sqrt{gk\tanh(kD)}$ for tyngdebølger på to ulike dyp, $D = 0.5$ m (heltrukken linje) og $D = 5.0$ m (stiplet linje). Hvilken av påstandene om fasehastighet v og gruppehastighet v_g til venstre er *riktig*?

A For bølgetall større enn ca 5 m^{-1} er v og v_g omtrent like store.
B v og v_g varierer i sterkere grad med dybden for korte enn for lange bølgelengder.
C Når bølgelengden er *mye* større enn dybden, blir v og v_g omtrent like store.
D Når bølgelengden er *mye* større enn dybden, blir v og v_g uavhengige av dybden.



Påstand C er riktig. Når $\lambda \gg D$ er $kD \ll 1$, og vi kan med god tilnærmelse skrive $\tanh kD \simeq kD$. Det gir $\omega(k) \simeq \sqrt{gk \cdot kD} = \sqrt{gD}k$, dvs en lineær dispersjonsrelasjon. Da er v og v_g like store. Dette viser umiddelbart at påstand D er feil. Påstand A er feil siden v_g nærmer seg verdien $v/2$ når λ blir stadig mindre (dvs tyngdebølger på dypt vann). Da blir dispersjonsrelasjonen etter hvert $\omega(k) = \sqrt{gk}$, slik at v og v_g *ikke* varierer med dybden. (Som viser at påstand B også er feil.)

C

Institutt for fysikk, NTNU

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Fasit, Midtsemesterprøve fredag 15. oktober 2010 kl 08.15 – 09.45

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	x				11	x			
2				x	12			x	
3				x	13		x		
4		x			14	x			
5	x				15		x		
6			x		16				x
7			x		17		x		
8		x			18				x
9				x	19		x		
10			x		20			x	