



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK

Mandag 6. august 2012 kl. 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 8).

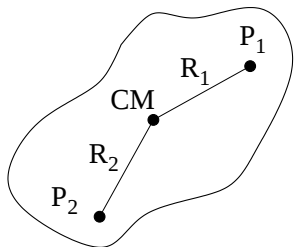
Sensurdato: Senest 27. august 2012.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:

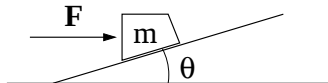
- Symboler i kursiv (f.eks. m for masse), enheter uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Vektorer med fete bokstaver (f.eks. $\mathbf{p}$)
- $\hat{x}$ er enhetsvektor i x -retning etc.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 p, galt svar (eller flere svar) gir 0 p.

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål (teller $2.5 \times 10 = 25\%$)**a.**

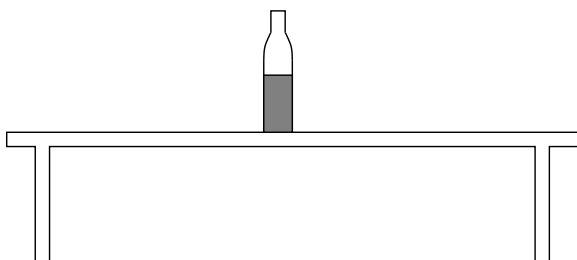
For legemet i figuren er $R_1 = R_2$, og CM angir tyngdepunktet. Punktene CM, P_1 og P_2 ligger alle i papirplanet. Treghetsmomentene om parallelle akser (normalt på papirplanet) gjennom CM, P_1 og P_2 er hhv I_0 , I_1 og I_2 . Da er

- A) $I_0 < I_1 = I_2$.
- B) $I_0 > I_1 = I_2$.
- C) $I_0 = I_1 = I_2$.
- D) $I_0 < I_1 < I_2$.

b.

En horisontal kraft F blir brukt for å skyve en gjenstand med masse m oppover et skråplan. Vinkelen mellom skråplanet og horisontalplanet er θ . Normalkraften som virker fra skråplanet på massen m er da

- A) $mg \cos \theta + F \cos \theta$.
- B) $mg \cos \theta$.
- C) $mg \cos \theta - F \cos \theta$.
- D) $mg \cos \theta + F \sin \theta$.

c.

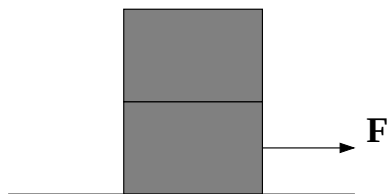
En flaske vin står i ro på et horisontalt bord. Flaskens vekt er i tallverdi like stor som kraften som virker fra bordet på flasken. Hvorfor?

- A) På grunn av Newtons 1. lov.
- B) På grunn av Newtons 3. lov.
- C) På grunn av at flasken ikke er tom.
- D) På grunn av at bordplaten er et stivt legeme.

d.

To like tunge kasser er festet til hverandre med et tau. Du drar med en kraft F i et annet tau som er festet i kassa til høyre, slik at begge kassene beveger seg mot høyre. Hva er snordraget S i tauet mellom de to kassene? (Begge tauene er tilnærmet masseløse.)

- A) $S = F/3$ B) $S = F/2$ C) $S = F$ D) $S = 2F$

e.

De to like tunge kassene (hver med masse m) er nå plassert oppå hverandre. I kontaktflaten mellom de to kassene gjør en friksjonskoeffisient μ seg gjeldende. Du drar med en kraft F i et tau som er festet i den underste kassa, slik at begge kassene beveger seg mot høyre med konstant fart v . Hva er friksjonskraften mellom de to kassene?

- A) Null B) μmg C) $2\mu mg$ D) F

f. I oppgave **e**, hva er friksjonskraften mellom den underste kassa og underlaget?

- A) Null B) μmg C) $2\mu mg$ D) F

g. Dersom relativ usikkerhet i masse og hastighet er hhv $\Delta m/m$ og $\Delta v/v$, hva blir da relativ usikkerhet i kinetisk energi?

- A) $\sqrt{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta v}{v}}$
 B) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^2}$
 C) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2}$
 D) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^4 + \left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^4}$

h.

```
[t,x,y]=textread('legeme.txt','%f %f %f');
N=length(t);
A=zeros(1,N);
B=zeros(1,N);
for i=2:N-1
    A(i)=(x(i+1)-x(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    B(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    C(i)=atan(x(i)/y(i));
    D(i)=sqrt(x(i)*x(i)+y(i)*y(i));
    E(i)=sqrt(A(i)*A(i)+B(i)*B(i));
    F(i)=D(i)*E(i);
end
```

Matlabkoden til venstre leser, fra fila legeme.txt, sammenhørende verdier for tid (t) og kartesiske koordinater (x , y) for et tilnærmet punktformet legeme som følger en sirkulær bane. Hvilken fysisk størrelse representerer da F i programmet?

- A) Kinetisk energi pr masseenhet.
- B) Lineær impuls pr masseenhet.
- C) Dreieimpuls, relativt origo, pr masseenhet.
- D) Sentripetalakselerasjon.

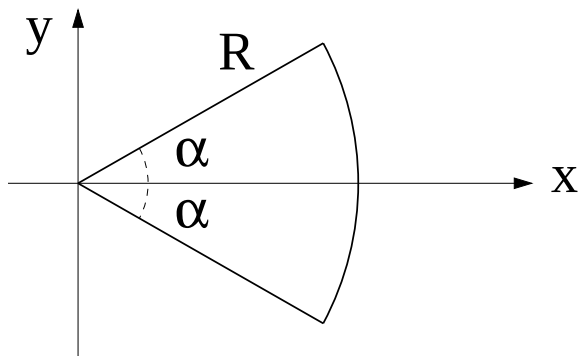
i.

To masser, m og $5m$, ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

- A) 33 % på m , 67 % på $5m$
- B) 67 % på m , 33 % på $5m$
- C) 17 % på m , 83 % på $5m$
- D) 83 % på m , 17 % på $5m$

j. Trehetsmomentet til en bordtennisball, mhp en akse gjennom bordtennisballens sentrum, er, målt i SI-enheter, av størrelsesorden

- A) $7 \cdot 10^{-11}$
- B) $7 \cdot 10^{-7}$
- C) $7 \cdot 10^{-3}$
- D) 70

Oppgave 2. (teller 30 %: 5+8+12+5)

Ei tynn, jevntykk skive er en del av ei sirkulær skive, har sektorvinkel 2α , og ligger i xy -planet som vist i figuren. Sirkelradien er R , og skiva har konstant masse σ pr flateenhet.

- a.** Regn ut (eller skriv ned) et uttrykk for skivas masse M .
- b.** Bestem skivas tyngdepunkt $\mathbf{R}_{CM} = (X_{CM}, Y_{CM})$. Er resultatet rimelig for $\alpha = \pi$? Enn for $\alpha \rightarrow 0$?
- c.** Bestem skivas treghetsmoment I_x med hensyn på rotasjon om x -aksen. Bestem deretter skivas treghetsmoment I_y med hensyn på rotasjon om y -aksen. Bestem til slutt skivas treghetsmoment I_z med hensyn på rotasjon om z -aksen. Skriv treghetsmomentene på formen $I_x = \sigma R^4 f(\alpha)$, $I_y = \sigma R^4 g(\alpha)$ og $I_z = \sigma R^4 h(\alpha)$, og tegn opp de tre dimensjonsløse funksjonene f , g og h i samme figur, som funksjon av vinkelen α i området $0 < \alpha < \pi$.
- d.** Diskuter de tre spesifikke resultatene *i)* $I_y > I_x$ for små verdier av α , *ii)* $I_y = I_x$ for $\alpha = \pi/2$, og *iii)* $I_y = I_x$ for $\alpha = \pi$. (Dvs: Vurder om disse resultatene er rimelige.)

Oppgitt:

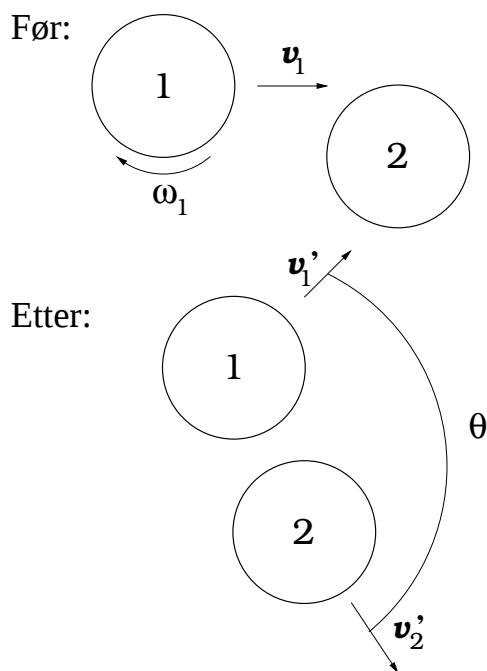
Flatelement i polarkoordinater: $dA = r d\phi \cdot dr$

Et par potensielt nyttige trigonometriske relasjoner:

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 \quad , \quad \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \cos 2\phi$$

Dessuten:

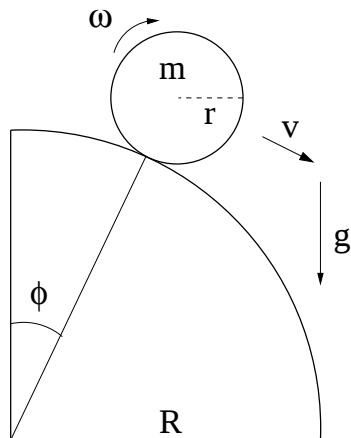
$$\sin \phi \simeq \phi \quad \text{hvis} \quad |\phi| \ll 1$$

Oppgave 3. (teller 15 %: 5+10)

To identiske sirkulære skiver kolliderer på et friksjonsfritt underlag. Kollisjonen er delvis uelastisk, og det virker friksjonskrefter mellom de to skivene i berøringspunktet i kollisjonsøyeblikket. Før kollisjonen ligger skive nr 2 i ro mens skive nr 1 har hastighet v_1 . Etter kollisjonen har skive 1 og 2 hastighet hhv v'_1 og v'_2 (figur til venstre, der vi ser systemet i fugleperspektiv).

a. Systemet bestående av de to skivene har total kinetisk energi E_i , total impuls $\mathbf{p}_i$ og total dreieimpuls $\mathbf{L}_i$ (relativt et passende valgt referansepunkt) før kollisjonen (*i* for *initial*). Tilsvarende størrelser etter kollisjonen er hhv E_f , $\mathbf{p}_f$ og $\mathbf{L}_f$ (*f* for *final*). Forklar hvorfor kinetisk energi E ikke er bevart i kollisjonen. Forklar videre hvorfor både $\mathbf{p}$ og $\mathbf{L}$ er bevarte størrelser.

b. Ta utgangspunkt i impulsbevarelse (tips: kvadrer ligningen!) og vis at kinetisk *translasjonsenergi* E^{trans} kan minke, øke eller forbli uendret som følge av kollisjonen, avhengig av vinkelen θ mellom de to slutt-hastighetene (se figur). Hvordan vil du forklare at translasjonsenergien kan øke i en slik kollisjon?

Oppgave 4. (teller 30 %: 5+5+10+10)

I denne oppgaven skal vi se på et sylindersymmetrisk legeme (masse m , radius r) som ruller (uten å gli) på en sirkelformet overflate (radius R). Legemets massesenter har hastighet v langs sirkelbanen, og legemets vinkelhastighet er ω . Vinkelen ϕ angir legemets posisjon, som vist i figuren til venstre. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom legemet og underlaget er μ . Tyn-gdens akselerasjon er g . Legemet holdes i ro ved vinkelen ϕ_0 ($0 < \phi_0 \ll 1$) og slippes ved tidspunktet $t = 0$. Legemets treghetsmoment med hensyn på rotasjon om massesenteret er $I_0 = cmr^2$, der c ($c < 1$) er et tall som avhenger av legemets massefordeling.

a. Tegn en figur som viser alle kreftene som virker på legemet (etter at vi har sluppet det). Figuren må inneholde vinkelen ϕ , og retning og angrepspunkt på alle kreftene må komme tydelig fram.

b. Skriv ned en sammenheng mellom v og ω . Skriv også ned en sammenheng mellom v og ϕ (eller mer presist: mellom v og $d\phi/dt$).

c. Bruk Newtons 2. lov og skriv ned bevegelsesligningene (i alt 3 ligninger) for det rullende legemet. Bruk deretter to av bevegelsesligningene og sammenhengene fra punkt **b** til å vise at vinkelen $\phi(t)$ oppfyller differensialligningen

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \Omega^2 \sin \phi = 0,$$

der Ω kan uttrykkes ved gitte størrelser (g , c , r og R). Kontroller at uttrykket ditt for Ω har korrekt enhet.

d. Ligningen for $\phi(t)$ har ingen enkel generell løsning, men for små verdier av ϕ , dvs $\phi \ll 1$, kan ligningen forenkles ved å benytte $\sin \phi \simeq \phi$. Løsningen kan da skrives på formen

$$\phi(t) = A \cosh \Omega t + B \sinh \Omega t.$$

Vis dette ved innsetting. Bruk initialbetingelsene gitt innledningsvis til å fastlegge koeffisientene A og B . Skisser til slutt grafen til $\phi(t)$ (for $t \geq 0$).

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_0) \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$ $V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega$ $f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk damping: $x(t) = Ae^{-bt/2m} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

Overkritisk damping: $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$ $\tau_{1,2} = \left(b/2m \pm \sqrt{b^2/4m^2 - k/m}\right)^{-1}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}}$ $\omega_0^2 = k/m$

Kraft $\mathbf{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + m\omega^2\boldsymbol{\rho}' + 2m\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$
($\mathbf{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}'$ er avstand fra rotasjonsaksen, $\mathbf{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial a_i} \Delta a_i \right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\bar{x}} = \delta_x / \sqrt{N}$