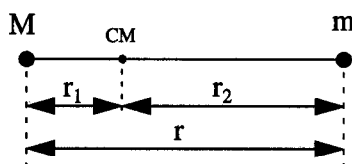


Løsningsskisse - Kontinuasjonseksamen SIF4010, 18. august 1999**Oppgave 1a**

Figur 1

Trehetsmomentet om en akse gjennom CM loddrett på forbindelseslinjen blir:

$$I = I_M + I_m = Mr_1^2 + mr_2^2$$

Innfører tyngdepunktskoordinater:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m} = 0 \Rightarrow M\vec{r}_1 = -m\vec{r}_2$$

benytter så at :

$$r_1 = |\vec{r}_1| \text{ og } r_2 = |\vec{r}_2| \text{ samt } r = r_1 + r_2$$

Dette gir så:

$$r_1 = \frac{m}{M + m}r \text{ og } r_2 = \frac{M}{M + m}r \Rightarrow I = M\left(\frac{m}{M + m}r\right)^2 + m\left(\frac{M}{M + m}r\right)^2$$

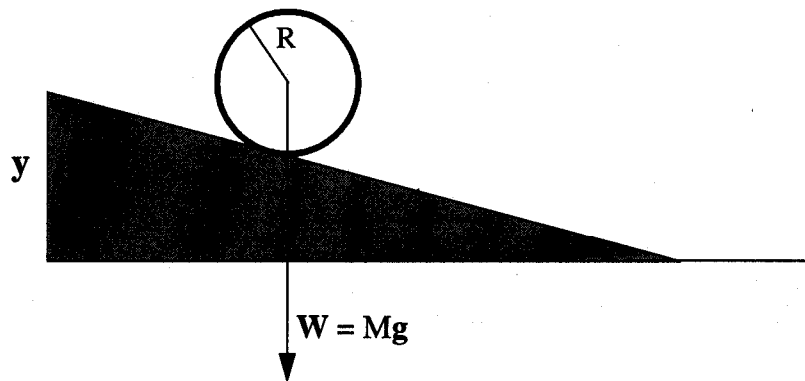
dermed

$$I = \frac{Mm}{M + m}r^2 = \mu r^2 \text{ hvor } \mu = \text{redusert masse}$$

Rotasjonsenergien blir følgende:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{Mm}{2(M + m)}r^2\omega^2$$

Oppgave 1b



Figur 2

Forholdet mellom vinkelhastighet ω og hastigheten v_p til et punkt på periferien til skiva er gitt ved:

$$v_p = R\omega$$

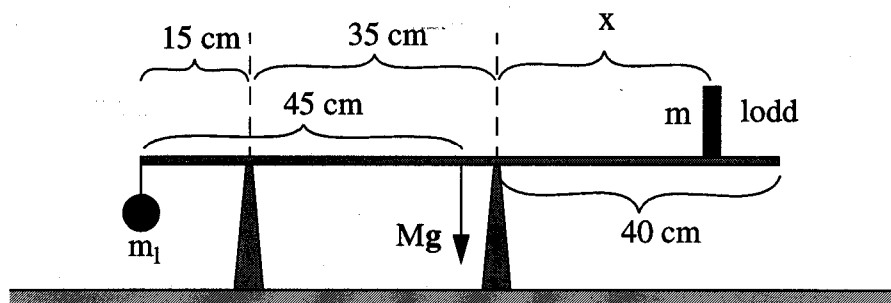
Dette er også hastigheten til massemidtpunktet. Hastigheten til massemidtpunktet kan uttrykkes ved M , g og y_0 ved å betrakte energibevarelse for rullebevegelsen. Total energien er gitt ved:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + Mgy$$

Startbetingelsene er $v=0$ og $y=y_0$ for $t=0$. Dette gir dermed når $y=0$ ved enden av skråplanet:

$$\frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = Mgy_0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Mgy_0}{M + I/R^2}} = \sqrt{\frac{4gy_0}{3}}$$

Oppgave 2a



Figur 3

Translasjonslikevekt og rotasjonslikevekt er gitt ved:

$$\sum_i F_i = 0 \text{ og } \sum_i \tau_i = 0$$

Dermed fås:

$$F_1 + F_2 = m_1 g + Mg + mg$$

Hvor F_1 og F_2 er kreftene som virker på bjelken fra støttene. Videre ser vi på rotasjonslikevekt om støtten til høyre på figur 3. Det gir:

$$m_1 g(0.15 + 0.35) + Mg(0.05) = F_1(0.35) + mgx$$

Oppgave 2b

Bjelken begynner å vippe når $F_1 = 0$. Rotasjonslikevekten gir da:

$$x = \frac{m_1(0.15 + 0.35) + M(0.05)}{m} = \frac{3 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.05}{6} [\text{m}]$$

$$x = 0.292 \text{ m}$$

Oppgave 2c

Vinkelakselerasjonen bestemmes ved:

$$I\alpha = \tau = mgx - m_1 g(0.5) - Mg(0.05)$$

Tregghetsmomentet finnes ved bruk av Steiners sats:

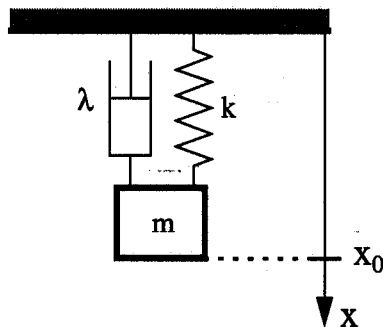
$$I = I_{\text{CM}} + MR^2 = M\left(\frac{L^2}{12} + (0.05)^2\right) = M\left(\frac{(0.81) + (0.0001)}{12} + (0.0025)\right) = 0.07M$$

Dermed fås for α :

$$\alpha = \frac{(6 \cdot 9.8)x - (3 \cdot 9.8 \cdot 0.5) - (5 \cdot 9.8 \cdot 0.05)}{(0.07 \cdot 5)} [\text{s}^{-2}]$$

$$\alpha = 168.0 \cdot x - 49.0 [\text{s}^{-2}]$$

Oppgave 3a



Figur 4

Kraftbalanse gir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\lambda \frac{dx}{dt} - kx + mg \Rightarrow m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial x}{\partial t} + kx = mg$$

Tyngdekraften medfører kun en forskyvning i likevektsposisjonen. Dermed fås:

$$x \rightarrow x - \frac{mg}{k} \Rightarrow \boxed{m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial x}{\partial t} + kx = 0}$$

Setter løsningen inn i ligningen og får:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\gamma t} [-\gamma \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)]$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Ae^{-\gamma t} [\gamma^2 \cos(\omega t + \alpha) + \omega \gamma \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + \omega \gamma \sin(\omega t + \alpha)]$$

Innsatt i svingeligningen gir dette:

$$\text{cos-ledd} \quad m(\gamma^2 - \omega^2) - \lambda\gamma + k = 0$$

$$\text{sin-ledd} \quad 2m\gamma\omega - \lambda\omega = 0$$

Dette gir:

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{2m}}$$

$$m \frac{\lambda^2}{4m^2} - m\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2m} + k = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}}$$

Perioden P er gitt ved:

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Oppgave 3b

Betrakt grensebetingelsene:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A \cos \alpha = x_0$$

$$\frac{d}{dt}x(0) = v_0 \Rightarrow -\gamma A \cos \alpha - \omega A \sin \alpha = v_0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\gamma}{\omega} - \frac{v_0}{\omega x_0}$$

Benytt så at:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}$$

Dermed kan vi skrive:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_0}{\cos \alpha} = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega} + \frac{v_0}{\omega x_0} \right)^2} \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(-\frac{\gamma}{\omega} - \frac{v_0}{\omega x_0} \right) \end{aligned}$$

Oppgave 3c

Svingeligningen var:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + k \left(x - \frac{mg}{k} \right) = 0$$

Dette gir følgende uttrykk for fjærkonstanten k:

$$X_0 - x_0 = \frac{Mg}{k} - \frac{mg}{k} \Rightarrow k = \frac{g(M - m)}{X_0 - x_0} = \frac{9.8(9 - 6)}{0.6 - 0.5} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

$$k = 294.0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$