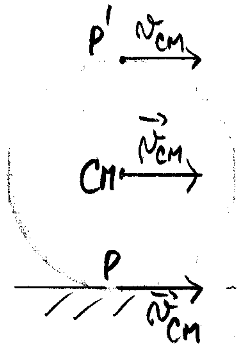
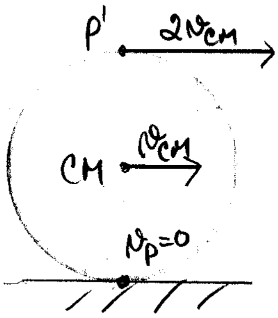
LØSNINGSFORSLAG KONT AUG 2000

Oppgave 1

a)



i. For ren translasjonsbevegelse har vi ingen rotasjon og alle tre punktene beveger seg med hastighet $\vec{v}_{CM}$ langs underlaget.



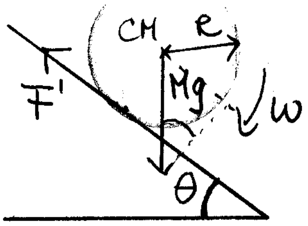
ii. I rullebevegelse beveger CM seg med hastighet v_{CM}, P' med hastighet

$$v_P = v_{CM} + R\omega = 2v_{CM}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{CM} = R\omega$$

mens $v_p = 0$ da det er en ren rullebevegelse langs underlaget

b)



i Kula har masse M. Positiv retning nedover

Translasjonsbevegelse av CM langs skråplanet:

$$\sum F_{\parallel} = Mg\sin\theta - F = Ma_{CM} \quad (1)$$

Rotasjon om CM:

$$I_{CM}\alpha = F'R \quad (2)$$

Rullebetingelsen: $v_{CM} = \omega R$; $a_{CM} = R\alpha$ (3)

(2) og (3) $\Rightarrow$ $F' = \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM}$

Innsatt i (1) : $Mg\sin\theta - \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM} = Ma_{CM}$

$$\Rightarrow a_{CM}\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) = Mg\sin\theta$$

$$\underline{a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}} \quad (4)$$

Innsatt for I_{CM} for kule:

$$\underline{\underline{a_{CM} = \frac{5}{7} g\sin\theta}} \qquad (5)$$

ii og iii. Tar utgangspunkt i (4) og setter inn I_{CM} og M_s for sylinder:

$$\Rightarrow a_{CM,syl} = \frac{2}{3} g\sin\theta \qquad (6)$$

Setter inn for hul sylinder:

$$a_{CM,hul\,syl} = \frac{g\sin\theta}{2} \qquad (7)$$

Av (5), (6) og (7) ser vi at $a_{CM,kule} > a_{CM,syl} > a_{CM,hul\,syl}$

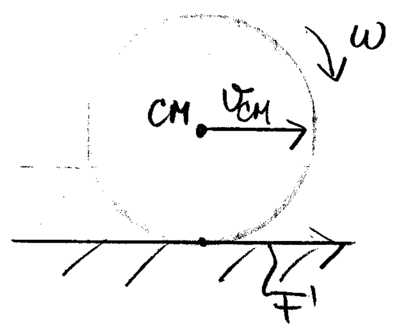
⇒ Kula når bunnen av skråplanet først

⇒ Den hule sylinderen kommer ned sist.

iv. Av (5), (6) og (7) ser vi at akselerasjonen er uavhengig av massen og radiusen til legemet. Det er kun den geometriske formen som avgjør.

⇒ Rekkefølgen blir den samme for andre masser og radiuser.

c) Biljardkula vil i utgangspunktet både ha rotasjons- og translasjonsbevegelse. Vi kjenner slutthastighet både for translasjon og rotasjon, pluss translasjonshastigheten ved $t=0$.



Translasjonsbevegelse så lenge kula glir:

$$Ma_{CM} = F' = \mu Mg$$

$$M\dot{v}_{CM} = \mu Mg$$

$$\Rightarrow \quad dv_{CM} = \mu g\, dt$$

$$\int_{v_0}^{\frac{9}{7}v_0} dv_m = \int_0^t \mu g\, dt'$$

$$\frac{9}{7}v_0 - v_0 = \frac{2}{7}v_0 = \mu g t$$

$\Rightarrow$ Bevegelsen går over til ren rullebevegelse ved

$$t = \frac{2v_0}{7\mu g} \qquad (8)$$

Rotasjonsbevegelsen gitt ved:

$$\tau = -F' \cdot R = I_{CM}\alpha = I_{CM}\,\dot{\omega} = -\mu M g R$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}MR^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu g M R$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = \int_0^t -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\, dt'$$

$$\Rightarrow \omega - \omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} t \qquad (9)$$

Ved ren rullebevegelse er $\omega R = v_{CM,t}$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{CM,t}}{R} = \frac{\frac{9}{7}v_0}{R} = \frac{9v_0}{7R} \qquad (10)$$

(8) og (10) innsatt i (9):

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \frac{9v_0}{7R} + \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} \cdot \frac{2v_0}{7\mu g} = \underline{\underline{2\frac{v_0}{R}}}$$

d) Endring i bevegelsesmengde i støtet:

$$F \cdot \Delta t = Mv_2 - Mv_1 = Mv_0 \qquad (v_1 = 0) \qquad (11)$$

Endring i dreieimpuls i støtet:

$$\tau \cdot \Delta t = L_2 - L_1 = I\omega_0 - 0 \qquad (L_1 = 0) \qquad (12)$$

Fra (11): $\Delta t = \frac{Mv_0}{F}$

Innsatt i (12):

$$\tau \cdot \Delta t = F \cdot h \cdot \Delta t = F \cdot h \cdot \frac{Mv_0}{F} = I_{CM}\,\omega_0$$

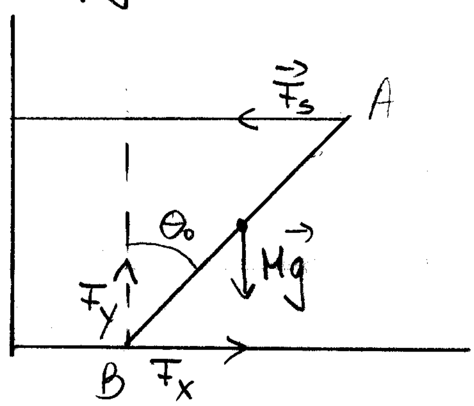
$$\Rightarrow \underline{\underline{h}} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{Mv_0} \cdot \frac{2v_0}{R} = \underline{\underline{\frac{4}{5}R}} \quad \text{q.e.d}$$

ii. Ren rullebevegelse i utgangspunktet:

$$\omega_0 = v_0/R$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h}} = \frac{I_{CM}\cdot\omega_0}{Mv_0} = \frac{\frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{v_0}{R}}{Mv_0} = \underline{\underline{\frac{2}{5}R}}$$

Oppgave 2



a)

$$\sum F_{vert} = 0 = F_y - Mg = 0$$

$$\Rightarrow \underline{F_y = Mg}$$

$$\sum F_{hor} = 0 = F_x - F_s = 0$$

Rotasjonslikevekt om B:

$$\sum \tau_z = mg \cdot \frac{l}{2}\sin\theta_0 - F_s \cdot l \cdot \cos\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_s = \frac{mg}{2} = F_x}}$$

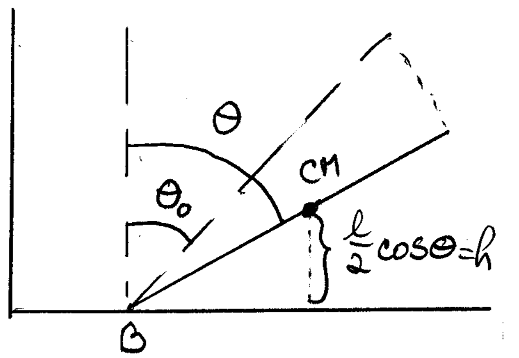
Betingelse på μ_s:

For at stanga ikke skal gli må F_x være mindre eller lik maksimal statisk friksjonskraft $\mu_s \cdot N$

$$F_x \leq \mu_s N = \mu_s F_y = \mu_s Mg$$

$$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{\frac{1}{2}Mg}{Mg} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq 0{,}5}}$$

b)



Bruker Steiners teorem for å finne treghetsmomentet om punktet B for stanga:

$$I_B = I_{CM} + M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\underline{I_B} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \underline{\frac{ML^2}{3}}$$

Finner $\omega(t)$ ved energibevarelse:

$$\Delta E_p = Mgh_0 - Mgh = Mg\cdot\frac{L}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{1}{2}I_B\,\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}g\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta\right)$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta\right)}}} \quad (= \dot\theta)$$

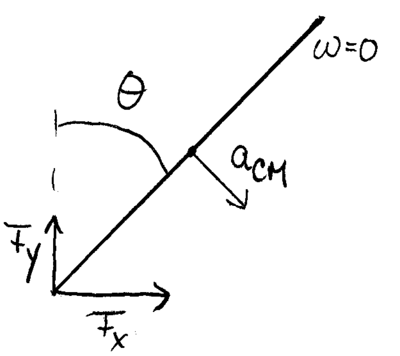
Bestemmer vinkelakselerasjonen ved å se på dreiemoment om B:

$$\tau_B = Mg\frac{L}{2}\cdot\sin\theta = I_B\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \dot\omega = \ddot\theta = \frac{MgL}{2\cdot\frac{1}{3}ML^2}\sin\theta = \underline{\underline{\frac{3g}{2L}\sin\theta}}$$

(α kan også finnes ved derivasjon av uttrykket for ω)

c)



Umiddelbart etter at snora er kuttet er $\theta = \theta_0 = 45°$

$$\Rightarrow \underline{\alpha} = \frac{3g}{2L}\sin 45° = \underline{\frac{3g}{4L}\sqrt{2}}$$

Da $\omega = 0$ har vi ingen sentripetalakselerasjon.

$\Rightarrow a_{CM} = \alpha\cdot\frac{L}{2}$ $\perp$ stanga, se figur.

$$a_x = a_y = \frac{a_{CM}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{L}{2}\alpha = \frac{\sqrt{2}L}{4}\cdot\frac{3g}{4L}\sqrt{2} = \frac{3}{8}g$$

$$\Rightarrow \sum F_{hor} = \underline{\underline{F_x}} = Ma_x = \underline{\underline{\frac{3Mg}{8}}}$$

$$\sum F_{vert} = Mg - F_y = Ma_y$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_y}} = Mg - Ma_y = Mg - \frac{3}{8} Mg = \frac{5}{8} Mg$$

Normalkraften er F_y:

Ved 45° må $F_x \leq \mu_s N = \mu_s F_y$

$$\Rightarrow \mu_s \geq F_x / F_y$$

Nå er $\frac{F_x}{F_y} = \frac{\frac{3}{8} Mg}{\frac{5}{8} Mg} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$\Rightarrow$ Betingelsen funnet i pkt. a) for μ_s er ikke tilstrekkelig for at stanga ikke skal gli rett etter at snora er kuttet.

Oppgave 3

a) Treghetsmomentet til staven om O (se oppg. 2):

$$I_{O,stav} = \frac{1}{3} M_{stav} \cdot L^2 = \frac{4M}{3} L^2$$

Fellesllegemet stav-partikkel har treghetsmoment om O

$$\underline{\underline{I_0}} = I_{O,stav} + M \cdot L^2 = \frac{4M}{3} L^2 + ML^2 = \underline{\underline{\frac{7}{3} ML^2}} \quad \text{q.e.d.}$$

Avstanden mellom O og CM for pendelen.

$$b = \left(M_{stav} \cdot \frac{L}{2} + M \cdot L\right) / (M_{stav} + M)$$

$$\underline{\underline{b}} = \frac{\frac{4M}{2} L + M \cdot L}{4M + M} = \underline{\underline{\frac{3}{5} L}}$$

b)

Dreiemomentet pga. tyngdekrafta gir svingebevegelsen. Positiv θ-retn vist på figur. τ_G virker i motsatt retning.

Dreieimpulsteoremet

$$\sum \tau = I\alpha = I\ddot{\theta}$$

$$\tau = -M_{tot}\, g\, x = -M_{tot}\, g\, b \cdot \sin\theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{M_{tot}\, g\, b}{I_0} \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{5M \cdot g \cdot \frac{3}{5}L}{\frac{7}{3}ML^2} \sin\theta = \underline{\underline{\ddot{\theta} + \frac{9g}{7L}\sin\theta = 0}}$$

For små θ : $\sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\theta} + \frac{9g}{7L}\theta = 0}}$$

c) Svingelikningen kan skrives:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_0 = 3\sqrt{\frac{g}{7L}}}}$$

(Kan eventuelt finnes ved innsetting i diff. likn.)

d) Bevaring av dreieimpuls i støtet i forhold til omdreiningsaksen O:

$$\vec{L}_{før} = \vec{L}_{etter}$$

$$\Rightarrow Mv \cdot L = I_0 \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega}} = \frac{MvL}{\frac{7}{3}ML^2} = \underline{\underline{\frac{3v}{7L}}}$$

Forholdet mellom kinetisk energi før og etter støtet.

$$E_{k,før} = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$E_{k,etter} = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$\frac{E_{k,\,\text{før}}}{E_{k,\,\text{etter}}} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}ML^2\left(\frac{3}{7}\frac{v}{L}\right)^2} = \frac{7}{3}$$

e) Betingelsen for at løsningen skal gjelde er at:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0 \Rightarrow \omega_0 > \gamma \quad \left(\gamma = \frac{\lambda}{2M_{tot}}\right)$$

Startbetingelsene: $\theta(t=0) = 0$ (1)

$\dot{\theta}(t=0) = \omega$ (2)

$$\theta(t=0) = \theta_1 e^{-\gamma\cdot 0}\cos(\omega_1\cdot 0+\alpha) = \theta_1\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm 90^\circ$$

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma\theta_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\alpha) - \omega_1\theta_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t+\alpha)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \theta_1(-\gamma\cos\alpha - \omega_1\sin\alpha) = -\theta_1\cdot\omega_1\sin\alpha = \omega \quad (3)$$

Da $\omega > 0$ og $\theta_1 > 0$ må $\sin\alpha < 0$

$$\Rightarrow \alpha = -\pi/2$$

For $\alpha = -\pi/2$ gir (3): $\theta_1\omega_1 = \omega$

$$\theta_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{der } \omega = \frac{3v}{7L}$$

og $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

f) Den tidsvarierende amplituden til svingningen er gitt ved: $\theta_1 e^{-\gamma t}$

Reduksjon til $\frac{\theta_1}{4}$ gir:

$$\theta_1 e^{-\gamma t} = \theta_1/4$$

$$\Rightarrow e^{\gamma t} = 4$$

$$\gamma t = \ln 4$$

$$t = \frac{\ln 4}{\gamma} = \frac{10M\ln 4}{\lambda}$$