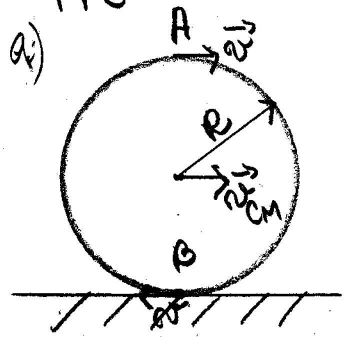
LØSNINGSFORSLAG SIF 4010 FYSIKK 1, EKSAMEN DES-97

Oppgave 1

a)



i. Ved ren rullebevegelse: $s = R\theta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_{CM}}} = \frac{ds}{dt} = \underline{\underline{R\omega}}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{CM}}} = \dot{v}_{CM} = R\dot{\omega} = \underline{\underline{R\alpha}}$$

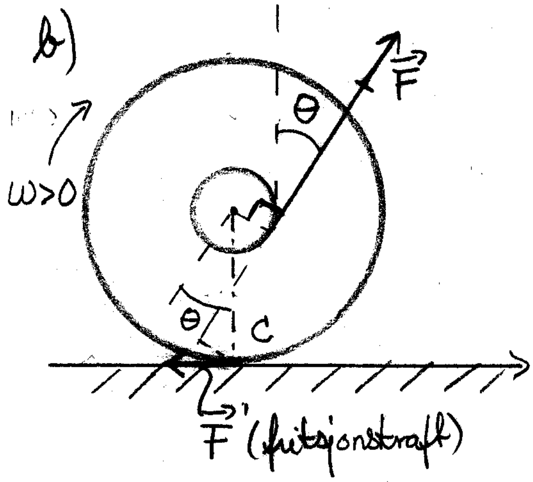
ii. Alle pkt. på periferien har hastighet med størrelse:

$v = \omega R$ om CM.

Sett fra utsiden: $\underline{\underline{v_A}} = v_{CM} + v = \underline{\underline{2R\omega}}$

$\underline{\underline{v_B}} = v_{CM} - v = \underline{\underline{0}}$ (som ventet da sylinderen ikke glir på underlaget)

b)



i. Velger v_{CM} pos. mot høyre og $\omega > 0$ med ~~klokka~~ (ω pos $\Rightarrow v_{CM}$ pos)

For ren rullebevegelse

$$R\alpha = \frac{dv_{CM}}{dt} = a_{CM} \quad (1)$$

Newtons 2. lov for CM:

$$\sum F = Ma_{CM} = F\sin\theta - F' \quad (2)$$

Dreiemoment om CM: $\sum \tau = I\alpha = -Fr + F'R \quad (3)$

(1) og (2) $\Rightarrow$ $F' = -MR\alpha + F\sin\theta$

Innsatt i (3): $I\alpha = -Fr - MR^2\alpha + FR\sin\theta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{F}{I + MR^2}(R\sin\theta - r)}} \quad \text{q.e.d}$$

Alternativt: Dreiemoment om C:

$$(MR^2 + I)\alpha = F(R\sin\theta - r)$$

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{F}{I + MR^2}(R\sin\theta - r)}} \quad \text{q.e.d}$$

ii. Ingen rulling når $\alpha = 0$

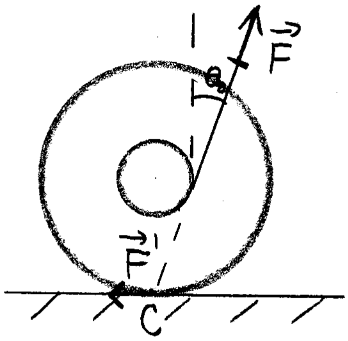
$$\Rightarrow R\sin\theta_0 - r = 0$$

$$\underline{\underline{\sin\theta_0 = r/R}}$$

iii. $\theta > \theta_0 \rightarrow \alpha > 0$ Jojoen beveger seg mot høyre

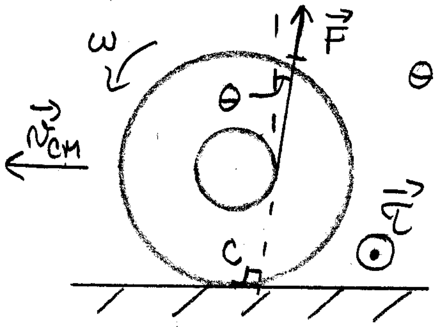
$\theta < \theta_0 \rightarrow \alpha < 0$ Jojoen beveger seg mot venstre

iv.



$\theta = \theta_0$

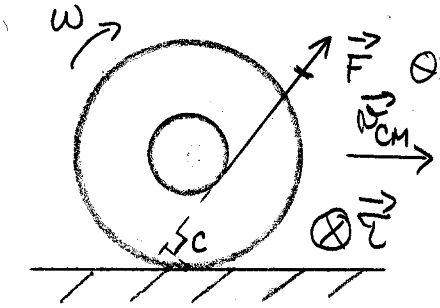
$\vec{F}$ har ingen arm om pkt C for $\theta = \theta_0$. Det samme gjelder $\vec{F}'$ $\Rightarrow$ Ingen rulling.



$\theta < \theta_0$

Om C: $\vec{F}$ gir dreiemoment som fører til dreining mot klokka

$\Rightarrow$ Jojoen beveger seg mot venstre



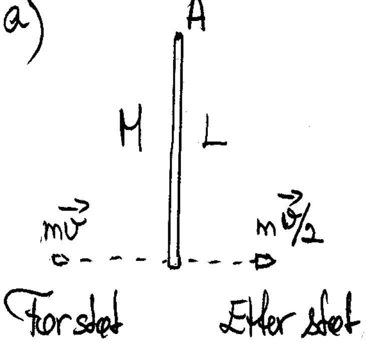
$\theta > \theta_0$

Om C: $\vec{F}$ gir dreiemoment som fører til dreining med klokka

$\Rightarrow$ Jojoen beveger seg mot høyre

Oppgave 2

a)



i. Treghetsmomentet for staven om CM:

$$I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$$

Steiners sats $\Rightarrow$ Treghetsmoment om A:

$$I = I_{CM} + Ma^2$$

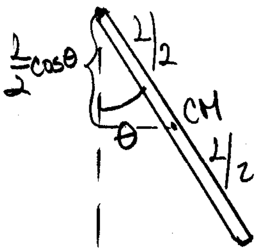
$$a = \frac{L}{2} \Rightarrow \underline{\underline{I_A}} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{ML^2}{3}}}$$

ii. Bevaring av dreieimpuls før og etter støtet:

$$L_{før} = mv \cdot L = L_{etter} = m\frac{v}{2} \cdot L + I_A \omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_0}} = \frac{mvL}{2I_A} = \frac{mvL \cdot 3}{2ML^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\frac{mv}{ML}}} \quad \text{q.e.d}$$

b)



i. Energibevarelse for staven gir idet vi velger $E_{p0} = 0$ for $\theta = 0$ (Likevektspos.)

$$E_{k0} = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2$$

$$E_0 = E_{k0} = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2$$

Ved vinkel θ: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + Mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta\right) = E_0 = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \div \frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}(1-\cos\theta) = \omega_0^2 - \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}}}$$

ii. Null hastighet ved $\theta = 90°$ $\Rightarrow \omega = 0$

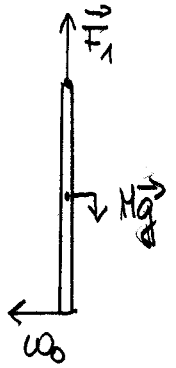
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{3g}{L}(1 - \cos 90°) = \frac{3g}{L}$$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{3mv}{2ML}\right)^2 = \frac{9m^2v^2}{4M^2L^2} = \frac{3g}{L}$$

$$v^2 = \frac{3g \cdot 4M^2L^2}{L \cdot 9m^2} = \frac{4M^2gL}{3m^2}$$

$$\underline{\underline{v = \frac{2M}{m}\sqrt{\frac{gL}{3}}}}$$

iii.



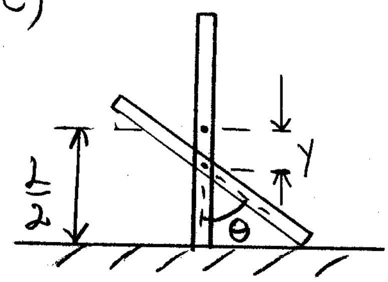
Reaksjonskraften $\vec{F}_1$:

$$\Sigma F = Ma_{CM} = M \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{L}{2} = F_1 - Mg$$

$$F_1 = M\frac{3g}{L} \cdot \frac{L}{2} + Mg$$

$$\underline{\underline{F_1 = \frac{5}{2}Mg}} \quad \text{(peker oppover)}$$

c)



Ingen krefter virker på staven i horisontalretningen $\Rightarrow$ CM faller vertikalt

$$E = E_p + E_k$$

Start: $E_{k0} = 0 \quad E_{p0} = Mg\frac{L}{2}$

Kinetisk energi ved vinkel θ:

$$E_k = E_k^{trans} + E_k^{rot} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v_{CM} = \dot{y} \quad ; \quad \omega = \dot{\theta} \quad ;$$

Potensiell energi ved vinkel θ og høyde y:

$$E_p = Mg\left(\frac{L}{2} - y\right)$$

Energibevaring gir:

$$\frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mg\left(\frac{L}{2} - y\right) = Mg\frac{L}{2}$$

Fra figuren: $y = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

$$\dot{y} = \frac{L}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2}{L\sin\theta}\dot{y}$$

$I = \frac{ML^2}{12}$ $\quad\Rightarrow \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\frac{L^2}{12}\left(\frac{2}{L\sin\theta}\right)^2\dot{y}^2 + Mg\left(\frac{L}{2} - y\right) = Mg\frac{L}{2}$

$$\Rightarrow \dot{y}^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sin^2\theta}\right] = gy$$

$$\underline{\underline{\dot{y} = \sqrt{\frac{6gy\sin^2\theta}{3\sin^2\theta + 1}}}}$$

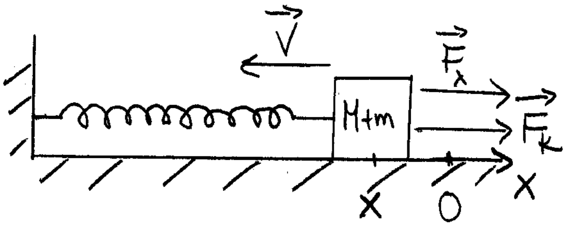
Oppgave 3

a) i. Bevaring av bevegelsesmengde før og etter støtet:

$$mv + M \cdot 0 = (m+M)V$$

$$\underline{\underline{V = \frac{mv}{(m+M)}}}$$

ii.



Fra figuren:
Newtons 2. lov:

$$\Sigma F = F_k + F_\lambda = (M+m)a$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

$$\Rightarrow \text{Diff. likn.:} \quad \underline{\underline{(M+m)\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0}}$$

iii. Løsning av diff. likn. $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$

Fra diff. likn.: $\gamma = \dfrac{\lambda}{2(M+m)}$ (Sammenlikning $m \to M+m$)

$$\underline{V} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 400\,\text{m/s}}{(1{,}00 + 10 \cdot 10^{-3})\,\text{kg}} = \underline{\underline{3{,}96\,\text{m/s}}}$$

Startbetingelser:

I $\quad x(t=0) = 0 = A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\pi/2$

II $\quad \dot{x}(t) = -\omega Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha) - \gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$

$\dot{x}(t=0) = -V = -\omega A\sin\alpha \quad$ da $\cos\alpha = 0$

Da $A > 0$ og $\omega > 0$ må $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \pi/2}}$$

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{200\,\text{N/m}}{1{,}010\,\text{kg}}} = \underline{\underline{14{,}1\,s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{\lambda}{2(M+m)} = \frac{14{,}2\,\text{Ns/m}}{2(1{,}010\,\text{kg})} = \underline{\underline{7{,}03\,s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{14{,}1^2 - 7{,}03^2}\,s^{-1} = \underline{\underline{12{,}2\,s^{-1}}}$$

Fra II $\quad \dot{x}(t=0) = -V = -\omega A$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{V}{\omega} = \frac{3{,}96\,\text{m/s}}{12{,}2\,s^{-1}} = \underline{\underline{0{,}325\,m}}$$

b) i. Max utslag blir 1. negative max ($\supset$: min)

Max/min for $\frac{dx}{dt} = -\omega A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) = 0$

Da $A \neq 0$ og $e^{-\gamma t} \neq 0$

$$\Rightarrow -\gamma \cos(\omega t_1 + \alpha) - \omega \sin(\omega t_1 + \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega t_1 + \alpha) = -\gamma/\omega = \div \frac{7.03}{12.2} = \div 0.576$$

$$\Rightarrow \omega t_1 + \alpha = 150^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Første verdi ($n=0$): $\omega t_1 + \alpha = 150^\circ \Rightarrow \omega t_1 = 60^\circ = \pi/3$

$\Rightarrow x(t_1) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t_1 + \alpha) < 0$ $\supset$: 1. minimum

Maksimalt utslag fra likevektsposisjonen; x_{min}:

$$x_{min} = A e^{-\gamma t_1} \cos(\omega t_1 + \alpha)$$

$$\underline{\underline{x_{min}}} = A e^{\div \frac{\gamma}{\omega}(t_1 \omega)} \cos(150^\circ) = \underline{\underline{\div 0.154 m}}$$

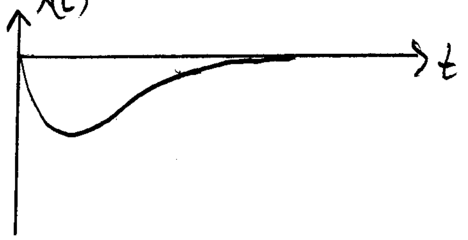
ii. $$\frac{x_{max}(t)}{x_{max}(t + T/2)} = \left| \frac{A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)}{A e^{-\gamma (t + T/2)} \cos[\omega(t + T/2) + \alpha]} \right|$$

$$T/2 = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \cos[\omega(t + T/2) + \alpha] = \cos(\omega t + \pi + \alpha) = \div \cos(\omega t + \alpha)$$

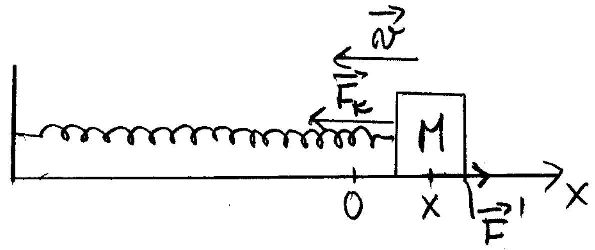
$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x_{max}(t)}{x_{max}(t + T/2)}}} = e^{\gamma \pi/\omega} = e^{7.03 \cdot \frac{\pi}{12.2}} = \underline{\underline{6.11}}$$

iii. Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 = \frac{\lambda_{krit}}{2(m+M)}$

$$\underline{\underline{\lambda_{krit}}} = 2\omega_0 (M+m) = \underline{\underline{28.5 \, Ns/m}}$$



Svingeforløp: Utslag til min og tilbake mot likevektsposisjonen uten å passere denne,

c) 

i. $\Sigma F = -kx + F' = M\ddot{x}$ for avtagende x (se figuren over)

$\Sigma F = -kx - F' = M\ddot{x}$ for økende x

$\Rightarrow$ Diff. likn. $\underline{\underline{M\ddot{x} + kx = \pm F' = \pm\mu N = \pm\mu Mg}}$

Løsning: $x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + K \quad 0 \le t \le T/2$ (avtag. x)

$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \alpha_2) - K \quad T/2 \le t \le T$ (økende x)

Diff. likningen er ikke homogen

Homogen likn. $M\ddot{x} + kx = 0$ som for enkel harm. osc.

med løsning av type $A\cos(\omega t + \alpha)$

Som oppfyller diff. likn. dersom $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

(som finnes ved innsetting) OBS! Endres ikke ved friksjon

Spesiell løsning av diff. likn.: $x_{spes} = \frac{F'}{k} = K$ (konst)

som oppfyller diff. likn (innsetting) og som gir:

$$\underline{\underline{K = \mu Mg/k}}$$

ii. Startbetingelser:

I $\quad x_1(t=0) = A_1\cos\alpha_1 + K = A_0$

II $\quad v(t) = \dot{x} = -\omega A_1\sin(\omega t + \alpha_1)$

$\dot{x}(t=0) = 0 = -\omega A_1\sin\alpha_1 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0$

$\underline{\underline{\alpha_1 = 0}}$

I gir $\quad A_1 + K = A \Rightarrow \underline{\underline{A_1 = A_0 - K}}$

Betingelser ved $t = T/2$

$$x_1 = x_2 \quad \text{(kontinuerlig bevegelse)}$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \text{(kontinuerlig hastighet og } v=0 \text{ i max. pkt.)}$$

$$\text{III} \quad x_1(T/2) = A_1\cos(\omega T/2) + K = A_1\cos\pi + K = -A_1 + K$$
$$\text{IV} \quad x_2(T/2) = A_2\cos(\omega T/2 + \alpha_2) - K$$
$$\text{V} \quad \dot{x}_2(T/2) = -\omega A_2\sin(\pi + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_2 = 0}}$$

III og IV gir $\quad A_2\cos\pi - K = -A_2 - K = -A_1 + K$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_2 = A_1 - 2K}}$$

$\Rightarrow$ For $0 \le t \le T$ er løsningen av diff. likn.:

$$x_1 = (A_0 - K)\cos(\omega t) + K \qquad 0 \le t \le T/2$$
$$x_2 = (A_0 - 3K)\cos(\omega t) + K \qquad T/2 \le t < T$$

iii

Energi ved $t=0$: $E_{p0} = \frac{1}{2}kA_0^2$

Ved $t=T$ er $x_2 = A_0 - 4K$

Energi ved $t=T$: $E_{pT} = \frac{1}{2}k(A_0 - 4K)^2$

Energitap pga. friksjonen:

$$\underline{\underline{W}} = \Delta E_p = -4KkA_0 + 8kK^2 = \underline{\underline{-F'(4A_0 - 8K)}}$$

Friksjonsarbeid: $W' = -F'\Delta x = -F'(A_0 + A_1 - K) - F'(A_1 - K + A_1 - 3K)$

$$= -F'(4A_0 - 8K)$$

Friksjonsarbeidet i løpet av første svingeperioden er lik energitapet i samme periode