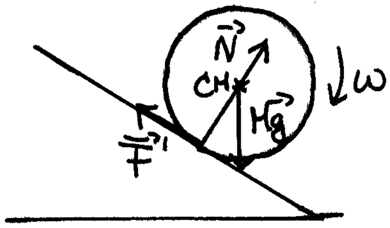
LØSNINGSFORSLAG

Eksamen des. -99, SIF 4010 FYSIKK 1.

Oppgave 1



a) $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har ingen arm om massemiddelpunktet, CM, $\Rightarrow$ Ikke noe dreiemoment om CM og gir ikke rulling. En friksjonskraft fra underlaget vil ha arm R om CM $\Rightarrow$ Derfor gir en friksjonskraft $\vec{F}' \neq 0$ et dreiemoment om CM og dermed rotasjonsbevegelse/rulling. $\vec{F}'$ må peke oppover langs skråplanet for å få ønsket rotasjonsretning.

b) Translasjonsbevegelse av CM:

$$\sum_{\parallel \text{plan}} F_{\parallel} = Mg\sin\theta - F' = Ma_{CM} \quad (1)$$

Rotasjon om CM : $I_{CM}\alpha = F'R \quad (2)$

Rullebetingelsen : $v_{CM} = \omega R \,;\; a_{CM} = R\alpha \quad (3)$

Likningene som beskriver bevegelsen til sylinderen

(2) og (3) $\Rightarrow$ $F' = \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM}$

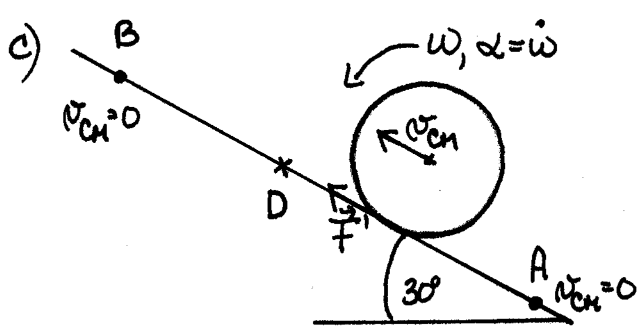
Innsatt i (1) : $Mg\sin\theta - \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM} = Ma_{CM}$

$$a_{CM}\left(M + I_{CM}/R^2\right) = Mg\sin\theta$$

$$\underline{a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}}$$

Innsatt for I_{CM} : $\underline{\underline{a_{CM} = \frac{2}{3} g\sin\theta}}$

$\underline{\underline{F'}} = \frac{I_{CM}}{R} a_{CM} = \frac{1}{2}M \cdot \frac{2}{3} g\sin\theta = \underline{\frac{1}{3} Mg\sin\theta}$ [Ikke μN da sylinderen IKKE glir] c)



v_{CM} velges positiv oppover langs skråplanet. ω er positiv for retningen vist i figuren.

Rotasjon om CM:

$$-F'R = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,\dot{\omega} \quad (1)$$

$F' = \mu N$ når vi har glidning

$$N = Mg\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$$

$$F' = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}Mg = \frac{3}{4}Mg \quad (2)$$

(2) i (1) $\Rightarrow$ $$\dot{\omega} = \div\frac{\frac{3}{4}MgR}{\frac{1}{2}MR^2} = \div\frac{3}{2}\frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = \int_0^t \div\frac{3}{2}\frac{g}{R}dt$$

$$\omega - \omega_0 = \div\frac{3}{2}\frac{g}{R}t$$

$$\underline{\omega = \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{g}{R}t}$$

Gjelder så lenge vi har glidning i tillegg til rotasjon.

Translasjon av CM:

$$F' - Mg\sin\theta = Ma_{CM} = M\dot{v}_{CM}$$

$$\frac{3}{4}Mg - Mg\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}Mg = Ma_{CM} = M\dot{v}_{CM}$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_{CM}} dv_{CM} = \int_0^t \frac{g}{4}dt$$

$$v_{CM} = \frac{g}{4}t$$

Ren rulling har vi når $v_{CM_1} = R\omega_1$ ved $t = t_1$

$$v_{CM,1} = \frac{g}{4}t_1 = (\omega_1 = \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{g}{R}t_1)R$$

$$\frac{7}{4}gt_1 = \omega_0 R$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{4}{7}\frac{\omega_0 R}{g}$$

$\Rightarrow$ Når ren rulling opptrer, tidspkt t_1 i pkt. D:

$$\underline{\underline{v_{CM,1}}} = \frac{g}{4}t_1 = \frac{g}{4}\cdot\frac{4}{7}\frac{\omega_0 R}{g} = \underline{\underline{\frac{\omega_0 R}{7}}}$$

d) Mellom D og B har vi ren rullebevegelse:

Newtons 2. lov: $F' - Mg\sin\theta = Ma_{CM}$ (1)

Dreiemoment om CM:

$$-F'R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\, \dot{v}_{CM}/R$$

$$F' = -\frac{1}{2}M\dot{v}_{CM} \quad (2) \quad \text{ved ren rulling}$$

$$(2) \text{ i } (1) \Rightarrow \quad \div\frac{1}{2}M\dot{v}_{CM} - \frac{1}{2}Mg = M\dot{v}_{CM} \quad \Rightarrow \dot{v}_{CM} = -\frac{g}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{v_{CM,1}}^{0} dv_{CM} = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{g}{3}dt$$

$$-v_{CM,1} = \div\frac{g}{3}(t_2 - t_1)$$

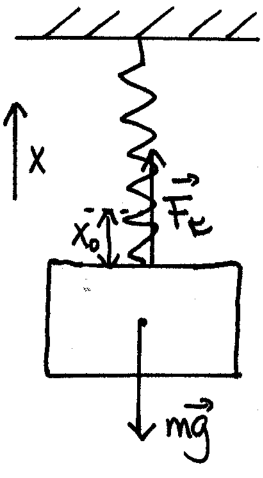
$$v_{CM,1} = \frac{g}{3}(t_2 - t_1)$$

$$t_2 - t_1 = t_{DB} = \frac{3}{g}v_{CM,1}$$

$$t_2 = t_{AB} = \frac{4\omega_0 R}{7g} + \frac{3}{g}\frac{\omega_0 R}{7}$$

$$\underline{\underline{t_2 = \frac{\omega_0 R}{g}}}$$

Oppgave 2



a) I likevekt: $\Sigma F_x = 0 = kx_0 - mg$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}} = \frac{mg}{x_0} = \frac{1{,}00 \cdot 9{,}80}{9{,}80\cdot 10^{-2}}\frac{N}{m} = \underline{\underline{100\, N/m}}$$

(Vinkel)egenfrekvensen:

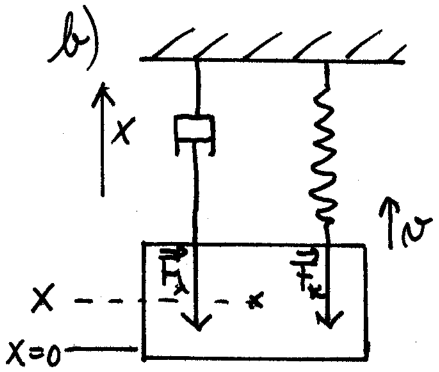
$$\underline{\underline{\omega_0}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1{,}00}}\, s^{-1} = \underline{\underline{10{,}0\, rad/s}}$$

Akselerasjonen er:

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha) = \omega^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$$

<u>Faseforskjellen mellom $x(t)$ og $a(t)$ er π</u> $\Leftrightarrow$
$x(t)$ og $a(t)$ er i motfase

b)



Newtons 2. lov idet vi velger $x=0$ i likevektsposisjonen:

$$\Sigma F_x = ma = m\ddot{x} = -kx - \lambda v$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}}$$

i. Løsningen som er oppgitt gjelder for underdempet svingning, dvs for $\underline{\omega > 0 \Leftrightarrow \omega_0 > \gamma}$

ii. Startbetingelsene

I : $x(t=0) = \underline{\underline{\div A_0 = A\cos\alpha}}$ (1) for x pos. oppover

$$\dot{x} = v = \left[-\gamma\cos(\omega t+\alpha) - \omega\sin(\omega t+\alpha)\right]Ae^{-\gamma t}$$

II : $v(t=0) = -\gamma\cos\alpha - \omega\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan\alpha = -\gamma/\omega}} \quad (2)$$

(1) og (2) bestemmer A og α.

iii. $$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad (3)$$

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ $$A\cos\alpha = A\cdot\frac{\div 1}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2}} = -A\frac{\omega}{\sqrt{\underbrace{\omega^2+\gamma^2}_{\omega_0^2}}}$$

÷ rot fordi $x(t=0) = -A_0$ for x pos. oppover.

$$\Rightarrow -A_0 = A\cos\alpha = -A\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = A_0\frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{q.e.d.}}}$$

c) $$\frac{x(nT)}{x(0)} = \frac{Ae^{-\gamma nT}\cos(\omega nT+\alpha)}{A\cos\alpha} < 0{,}1$$ der n er heltall.

$$\omega\cdot nT = n\cdot\frac{2\pi}{\omega}\cdot\omega = 2\pi\cdot n \Rightarrow \cos(\omega\cdot nt+\alpha) = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{x(nT)}{x(0)} = e^{-\gamma nT} < 0.1$$

$\Rightarrow \frac{X(0)}{X(nT)} = e^{\gamma nT} > 10$

$\gamma nT > \ln 10$

$n > 8{,}26 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{n = 9}}$

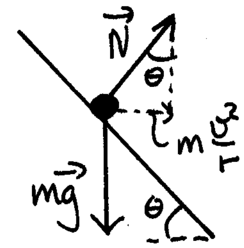
Energi ved max utslag : $E = E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$\Rightarrow \frac{E(9T)}{E(0)} = \frac{\frac{1}{2}k(e^{-\gamma 9T})^2 A^2 \cos^2\alpha}{\frac{1}{2}k(A\cos\alpha)^2} = e^{-2\gamma 9T} = 0{,}0067$

(med $T = 0{,}63\,Hz$, $\gamma = 0{,}441\,s^{-1}$)

$\underline{\underline{\frac{E(9T)}{E(0)} = 0{,}0067}}$ ⇔ Energien 6,7‰ av opprinnelig energi.

Oppgave 3



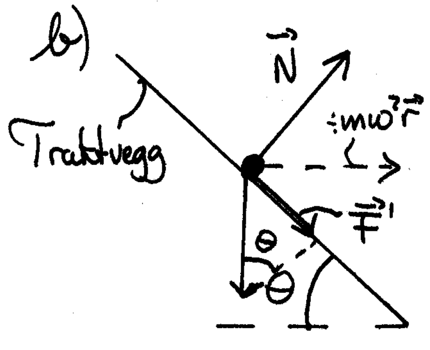
a) Partikkelen følger bevegelsen til trakta og roterer derfor med vinkelhastighet ω i avstand r fra rotasjonsaksen. Partikkelen får sentripetalakselerasjon fra $N_{horisontal}$: $N\sin\theta = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ (1)

Vertikalt : $N\cos\theta = mg$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\tan\theta}}}$

b)



i. Sentripetalakselerasjonen fremdeles i horisontalplanet: $m\omega^2 r$

Fordi vi skal se på når partikkelen beveger seg utover langs trattveggen, dekomponering ⊥ og ∥ trattveggen.

Ingen bevegelse ⊥ trattveggen

$\Rightarrow N - mg\cos\theta = m\omega^2 r \sin\theta$ (1)

Komp. av sentripetalaks. ⊥ trattveggen

Maksimal friksjonskraft $F' = \mu N$ (2)

Partikkelen vil begynne å bevege seg oppover langs hattveggen om kreftene ∥ denne er mindre en sentripetal-akselerasjonskomponenten ∥ hattveggen

$$mg\sin\theta + F' \leq m\omega^2 r\cos\theta \quad (3)$$

Likhetstegn er grensetilfellet.

(1) og (2) i (3) ⇒

$$mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta + \mu m\omega^2 r\sin\theta \leq m\omega^2 r\cos\theta$$

$$mg(\mu\cos\theta + \sin\theta) \leq m\omega^2 r(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

$$\omega^2 \geq \frac{g}{r}\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \quad (4)$$

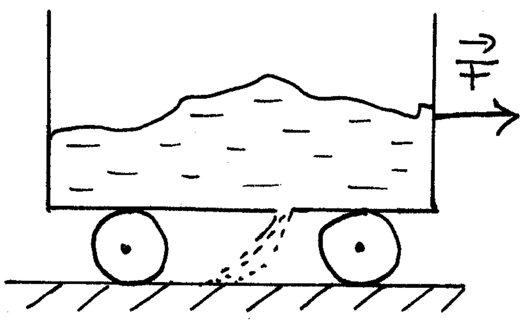
For $\underline{\underline{\omega > \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}}}$ vil partikkelen bevege seg oppover langs hattveggen.

ii. Av (4) ser vi at $\omega^2 \to \infty$ når $\cos\theta - \mu\sin\theta = 0$

⇒ $\underline{\underline{\tan\theta_{max} = \frac{1}{\mu}}}$ er kritisk vinkel for at partikkelen skal bevege seg oppover

For $\theta > \theta_{max}$ vil ikke partikkelen bevege seg oppover langs hattveggen uansett hva ω er.

c)



Endring i massen til vogna:

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{M_0}^{M} dM = \int_0^t (-\alpha)\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M(t) = M_0 - \alpha t}} \quad (t > 0)$$

Da sanden som renner ut har samme hastighet som vogna idet den forlater vogna, virker det ingen kraft på vogna fra sanden.

d) Ser på bevegelsesmengden til systemet ved tidspunkt t og $t+dt$

$$p(t) = Mv$$

$$p'(t+dt) = \underbrace{(M+dm)(v+dv)}_{\text{vogna}} + \underbrace{(-dm)v}_{\text{sand som lekker ut i løpet av } dt} \qquad (dm<0)$$

$$dp = p' - p = Mv + dm\,v + M\,dv + dm\,dv - dm\,v - Mv$$

$dp = M\,dv$ idet leddet $dm\,dv$ neglisjeres fordi det er mye mindre enn øvrige ledd.

$\Rightarrow$ Pr. tidsenhet $\frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt} = F$ (Newtons 2. lov)

Dette gir: $dv = \frac{F}{M}dt = \frac{F}{M_0 - \alpha t}dt$

Hastighet som funksjon av tiden t:

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{F\,dt'}{M_0 - \alpha t'} = \left[-\frac{F}{\alpha}\ln(M_0 - \alpha t)\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(t)}} = -\frac{F}{\alpha}\ln\left[\frac{M_0 - \alpha t}{M_0}\right] = \underline{\underline{\frac{F}{\alpha}\ln\left[\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right]}} \quad \text{q.e.d}$$

$$v(t) = -\frac{F}{\alpha}\ln\left[1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right]$$

Når $\alpha \to 0$ blir $\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right) \simeq -\frac{\alpha}{M_0}t$

Som gir $\underline{\underline{v(t) \to \frac{F}{M_0}t}}$ når $\alpha \to 0$

Dette er resultatet vi hadde fått om vogna beveget seg under konstant kraft og hadde konstant masse.